

VALLEJO-ZAMBRANO

SOLUCIONARIO

1

FISICA

VECTORIAL

Introducción

La siguiente obra es una ayuda para cualquier estudiante del nivel medio, superior ó nivel universitario que brinda apoyo de guía en los ejercicios propuestos por el libro “FISICA VECTORIAL 1” de los autores Vallejo-Zambrano.

No hay explicaciones detalladas sobre los problemas, solo se sigue el camino de la razón y lógica para llegar a la solución es por eso que se pide al estudiante tener conocimientos básicos de álgebra, trigonometría y física vectorial.

Las dudas o sugerencias serán aceptadas en la dirección que aparece a pie de página para poder conseguir un mejor entendimiento si es que le hace falta a la obra expuesta.

Se considera esfuerzo al estudiante para poder desarrollar la capacidad del razonamiento matemático en la solución de problemas más complejos sin embargo las dudas de cualquier procedimiento no entendible serán bienvenidas a las siguientes direcciones: www.facebook.com/todoepn
todo_epn@hotmail.com

ÍNDICE

EJERCICIO Nº 3	4
EJERCICIO Nº 4	16
EJERCICIO Nº5.....	38
EJERCICIO Nº6	59
EJERCICIO Nº 7	66
EJERCICIO Nº8	81
EJERCICIO Nº 9	112
EJERCICIO Nº10	118
EJERCICIO Nº11	127
EJERCICIO Nº12	133
EJERCICIO Nº13	140
EJERCICIO Nº14	169
EJERCICIO Nº 15	176

EJERCICIO N° 3

1. Expresar en coordenadas rectangulares los siguientes vectores:

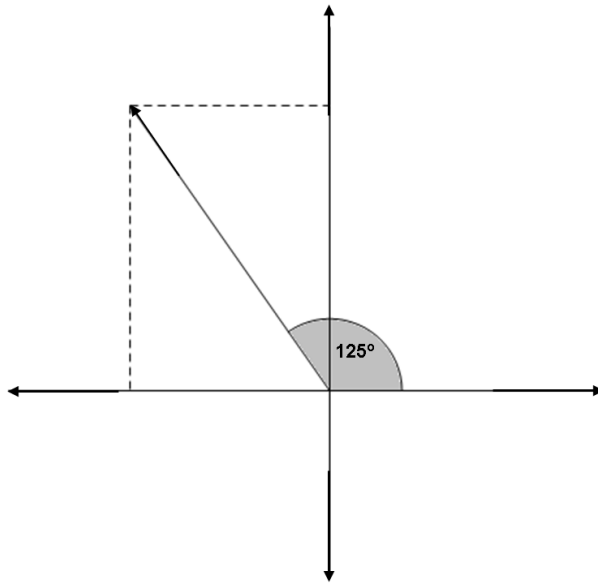
a) $\vec{A} = (15\vec{i} - 20\vec{j})\text{m}$

SOLUCIÓN:

$$\vec{A} = (15, -20)\text{m}$$

b) $\vec{B} = (130\text{ N}, 125^\circ)$

SOLUCIÓN:



$$\vec{B}_x = |\vec{B}| \cos \theta$$

$$\vec{B}_x = 130\text{ N} \cos 125^\circ$$

$$\vec{B}_x = -74,56\text{ N}$$

$$\vec{B}_y = |\vec{B}| \sin \theta$$

$$\vec{B}_y = 130\text{ N} \sin 125^\circ$$

$$\vec{B}_y = 106,49\text{ N}$$

$$\vec{B} = (B_x, B_y)$$

$$\vec{B} = (-74,56; 106,49)\text{ N}$$

c) $\vec{C} = (37\text{ cm}, \text{N}37^\circ\text{ E})$

$$\vec{B}_x = |\vec{B}| \sin \phi$$

$$\vec{B}_x = 37 \text{ cm} \sin 37^\circ$$

$$\vec{B}_x = 22,27 \text{ cm}$$

$$\vec{B}_y = |\vec{B}| \cos \phi$$

$$\vec{B}_y = 37 \text{ cm} \cos 37^\circ$$

$$\vec{B}_y = 29,55 \text{ cm}$$

$$\vec{B} = (B_x, B_y)$$

$$\vec{B} = (22,27; 29,55) \text{ cm}$$

d) $\vec{D} = 25 \text{ kgf} (-0,6 \vec{i} - 0,8 \vec{j})$

SOLUCIÓN:

$$\vec{D} = 25 \text{ kgf} (-0,6 \vec{i} - 0,8 \vec{j})$$

$$\vec{D} = (-15 \vec{i} - 20 \vec{j}) \text{ kgf}$$

$$\boxed{\vec{D} = (-15, -20) \text{ kgf}}$$

2. Expresar en coordenadas polares los siguientes vectores:

a) $\vec{A} = (-14 \vec{i} + 8 \vec{j}) \text{ m}$

SOLUCIÓN:

$$|\vec{A}| = \sqrt{(14^2 + 8^2)}$$

$$|\vec{A}| = 16,12 \text{ m}$$

$$\tan \theta = \frac{8}{14}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{8}{14} \right)$$

$$\theta = 29,74^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - \theta$$

$$\alpha = 180^\circ - 29,74$$

$$\alpha = 150,26^\circ$$

$$\boxed{\vec{A} = (16,12 \text{ m}; 150,26^\circ)}$$

b) $\vec{B} = (87, 91) \text{ N}$

SOLUCIÓN:

$$|\vec{B}| = \sqrt{(87^2 + 91^2)}$$

$$|\vec{B}| = 125,90 \text{ N}$$

$$\tan \theta = \frac{91}{87}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{91}{87} \right)$$

$$\theta = 46,29^\circ$$

$$\boxed{\vec{B} = (125,90 \text{ N}; 46,29^\circ)}$$

c) $\vec{C} = 45 \text{ kgf} (0,707 \vec{i} - 0,707 \vec{j})$

SOLUCIÓN:

$$\tan \theta_1 = \frac{0,707}{0,707}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{0,707}{0,707} \right)$$

$$\theta_1 = 45^\circ$$

$$\theta = 270^\circ + \theta_1$$

$$\theta = 270^\circ + 45^\circ$$

$$\theta = 315^\circ$$

$$\boxed{\vec{C} = (45 \text{ kgf}; 315^\circ)}$$

d) $\vec{D} = (22 \text{ N}, \text{S } 28^\circ \text{ O})$

SOLUCIÓN:

$$\theta = 270^\circ - \phi$$

$$\theta = 270^\circ - 28^\circ$$

$$\theta = 242^\circ$$

$$\boxed{\vec{D} = (22 \text{ N}, 242^\circ)}$$

3. Expresar en coordenadas geográficas los siguientes vectores:

a) $\vec{A} = (52, -25) \text{ N}$

SOLUCIÓN:

$$|\vec{A}| = \sqrt{52^2 + 25^2}$$

$$|\vec{A}| = 57,7 \text{ N}$$

$$\tan \phi = \frac{52}{25}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{52}{25} \right)$$

$$\phi = 64,32^\circ$$

$$\boxed{\vec{A} = (57,7 \text{ N}; \text{S } 64,32^\circ \text{ E})}$$

b) $\vec{B} = (47 \text{ N}, 245^\circ)$

$$\phi = 270^\circ - 245^\circ$$

$$\phi = 25^\circ$$

$$\boxed{\vec{B} = (47 \text{ N}, \text{S } 25^\circ \text{ O})}$$

SOLUCIÓN:

c) $\vec{C} = -32 \vec{i}m + 21 \vec{j}m$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} |\vec{C}| &= \sqrt{32^2 + 21^2} \\ |\vec{C}| &= 38,28m \end{aligned} \quad \begin{aligned} \tan \phi &= \frac{32}{21} \\ \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{32}{21} \right) \\ \phi &= 56,73^\circ \end{aligned} \quad \boxed{\vec{C} = (38,28m; N 56,73O)}$$

d) $\vec{D} = 35cm(0,866 \vec{i} + 0,5 \vec{j})$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} \tan \phi &= \frac{0,5}{0,866} \\ \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{0,5}{0,866} \right) \\ \phi &= 30^\circ \end{aligned} \quad \boxed{\vec{D} = (35cm; N 30^\circ E)}$$

4. Exprese en función de sus módulos y vectores unitarios los siguientes vectores:

a) $\vec{A} = (44m, 340^\circ)$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} A_x &= |\vec{A}| \cos \theta & A_y &= |\vec{A}| \sin \theta \\ A_x &= 44m \cos 340^\circ & A_y &= 44m \sin 340^\circ & \vec{A} &= (41,35 \vec{i} - 15,05 \vec{j})m \\ A_x &= 41,35m & A_y &= -15,05m \end{aligned}$$

$$\vec{\mu}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

$$\vec{\mu}_A = \frac{(41,35\vec{i} - 15,05\vec{j})\text{m}}{44\text{m}}$$

$$\vec{\mu}_A = (0,94\vec{i} - 0,34\vec{j})$$

$$\boxed{\vec{A} = 44\text{m}(0,94\vec{i} - 0,34\vec{j})}$$

b) $\vec{B} = (25\text{km}, \text{S}14^\circ\text{O})$

SOLUCIÓN:

$$\theta = 270^\circ + 14^\circ$$

$$\theta = 284^\circ$$

$$B_x = |\vec{B}| \cos \theta$$

$$B_x = 25\text{km} \cos 284^\circ$$

$$B_x = 6,05\text{km}$$

$$B_y = |\vec{B}| \sin \theta$$

$$B_y = 25\text{km} \sin 284^\circ \quad \vec{A} = (6,05\vec{i} - 24,26\vec{j})\text{km}$$

$$B_y = -24,26\text{km}$$

$$\vec{\mu}_B = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$$

$$\vec{\mu}_B = \frac{(6,05\vec{i} - 24,26\vec{j})\text{km}}{25\text{km}}$$

$$\vec{\mu}_B = (0,24\vec{i} - 0,97\vec{j})$$

$$\boxed{\vec{B} = 25\text{km}(0,24\vec{i} - 0,97\vec{j})}$$

c) $\vec{C} = (-21, 45)\text{N}$

SOLUCIÓN:

$$|\vec{C}| = \sqrt{21^2 + 45^2}$$

$$|\vec{C}| = 49,66^\circ\text{N}$$

$$\vec{\mu}_c = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|}$$

$$\vec{\mu}_c = \frac{(-21\vec{i} + 45\vec{j})\text{N}}{49,66\text{N}}$$

$$\vec{\mu}_c = (-0,42\vec{i} + 0,90\vec{j})$$

$$\boxed{\vec{C} = 49,66\text{N}(-0,42\vec{i} + 0,90\vec{j})}$$

d) $\vec{D} = (17\vec{i} + 9\vec{j})\text{kgf}$

SOLUCIÓN:

$$|\vec{D}| = \sqrt{17^2 + 9^2}$$

$$|\vec{D}| = 19,24\text{kgf}$$

$$\vec{\mu}_d = \frac{\vec{D}}{|\vec{D}|}$$

$$\vec{\mu}_d = \frac{(17\vec{i} + 9\vec{j})\text{kgf}}{19,24\text{kgf}}$$

$$\vec{\mu}_d = (0,88\vec{i} + 0,47\vec{j})$$

$$\boxed{\vec{D} = 19,24\text{kgf}(0,88\vec{i} + 0,47\vec{j})}$$

5. Expresar el vector $\vec{R} = (-13, -27)\text{m}$ en:

- a) Coordenadas polares
- b) Función de los vectores base
- c) Coordenadas geográficas
- d) Función de su modulo y unitario

SOLUCIÓN:

$$\vec{R} = (-13, -27)\text{m}$$

a)

$$|\vec{R}| = \sqrt{13^2 + 27^2}$$

$$|\vec{R}| = 29,97 \text{ m}$$

$$\vec{R} = (29,97 \text{ m}; 244,29^\circ)$$

$$\tan \theta_1 = \frac{27}{13}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{27}{13}\right)$$

$$\theta_1 = 64,29^\circ$$

$$\theta = 64,29^\circ + 180^\circ$$

$$\theta = 244,29^\circ$$

b)

$$\vec{R} = (-13\vec{i} - 27\vec{j})\text{m}$$

c)

$$\phi = 270^\circ - 244,29^\circ$$

$$\phi = 25,71^\circ$$

$$\vec{R} = (29,97 \text{ m}; \text{S } 25,71^\circ \text{ O})$$

d)

$$\vec{\mu}_R = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

$$\vec{\mu}_R = \frac{(-13\vec{i} - 27\vec{j})\text{m}}{29,97 \text{ m}}$$

$$\vec{\mu}_R = (-0,43\vec{i} - 0,9\vec{j})$$

$$\vec{R} = 29,97 \text{ m}(-0,43\vec{i} - 0,9\vec{j})$$

6. Expresar el vector $\vec{V} = (200 \text{ km}, 318^\circ)$ en :

- a) Coordenadas geográficas
- b) Coordenadas rectangulares
- c) Función de los vectores base
- d) Función de su modulo y unitario

SOLUCIÓN:

$$\vec{V} = (200 \text{ km}, 318^\circ)$$

a)

$$\phi = 318^\circ - 270^\circ$$

$$\phi = 48^\circ$$

$$\vec{V} = (200 \text{ km}, \text{S } 48^\circ \text{ E})$$

b)

$$V_x = |\vec{V}| \cos 318^\circ$$

$$V_x = 200 \text{ km} \cos 318^\circ$$

$$V_x = 148,63 \text{ km}$$

$$V_y = |\vec{V}| \sin 318^\circ$$

$$V_y = 200 \text{ km} \sin 318^\circ$$

$$V_y = -133,83 \text{ km}$$

$$\boxed{\vec{V} = (148,63; -133,83) \text{ km}}$$

c)

$$\boxed{\vec{V} = (148,63 \vec{i} - 133,83 \vec{j}) \text{ km}}$$

d)

$$\vec{\mu}_V = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$$

$$\vec{\mu}_V = \frac{(148,63 \vec{i} - 133,83 \vec{j}) \text{ km}}{200 \text{ km}}$$

$$\vec{\mu}_V = (0,743 \vec{i} - 0,669 \vec{j})$$

$$\boxed{\vec{V} = 200 \text{ km} (0,743 \vec{i} - 0,669 \vec{j})}$$

7. Expresar el vector $\vec{K} = (20 \text{ N}, \text{N}47^\circ \text{O})$ en:

- a) Coordenadas polares
- b) Coordenadas rectangulares
- c) Función de su modulo y unitario
- d) Función de los vectores base

SOLUCIÓN:

a)

$$\theta = 90^\circ + 47^\circ$$

$$\theta = 137^\circ$$

$$\vec{K} = (20 \text{ N}; 137^\circ)$$

b)

$$K_x = |\vec{K}| \cos \theta$$

$$K_x = 20 \text{ N} \cos 137^\circ$$

$$K_x = -14,63 \text{ N}$$

$$K_y = |\vec{K}| \sin \theta$$

$$K_y = 20 \text{ N} \sin 137^\circ$$

$$K_y = 13,64 \text{ N}$$

$$\boxed{\vec{K} = (-14,63; 13,64) \text{ N}}$$

c)

$$\vec{\mu}_K = \frac{\vec{K}}{|\vec{K}|}$$

$$\vec{\mu}_K = \frac{(-14,63\vec{i} + 13,64\vec{j})\text{N}}{20\text{N}}$$

$$\vec{\mu}_K = (-0,73\vec{i} + 0,68\vec{j})$$

$$\vec{K} = 20\text{N}(-0,73\vec{i} + 0,68\vec{j})$$

d)

$$\vec{K} = (-14,63\vec{i} + 13,64\vec{j})\text{N}$$

8. Expresar el vector $\vec{L} = 147\text{cm}(\vec{m}\vec{i} - \vec{n}\vec{j})$; Si $m = 3n$, en:

- a) Coordenadas geográficas
- b) Coordenadas polares
- c) Coordenadas rectangulares
- d) Función de los vectores base

SOLUCIÓN:

$$\vec{\mu}_L = (\vec{m}\vec{i} - \vec{n}\vec{j}) \quad m = 3n$$

$$\vec{\mu}_L = (3n\vec{i} - \vec{n}\vec{j})$$

$$1 = \sqrt{((3n)^2 + n^2)}$$

$$\sqrt{9n^2 + n^2} = 1$$

$$\sqrt{10}n = 1$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$n = 0,316$$

$$\vec{\mu}_L = (\vec{m}\vec{i} - \vec{n}\vec{j}) \quad m = 3n$$

$$\vec{\mu}_L = (3n\vec{i} - \vec{n}\vec{j})$$

$$\vec{\mu}_L = (3 \times 0,316\vec{i} - 0,316\vec{j})$$

$$\vec{\mu}_L = (0,948\vec{i} - 0,316\vec{j})$$

a)

$$\tan \phi = \frac{0,948}{0,316}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{0,948}{0,316} \right) \quad \boxed{\vec{L} = (147 \text{ cm}; S 71,57^\circ O)}$$

$$\phi = 71,57^\circ$$

b)

$$\theta = 270^\circ + 71,57^\circ$$

$$\theta = 341,57^\circ$$

$$\boxed{\vec{L} = (147 \text{ cm}; 341,57^\circ)}$$

c)

$$\vec{L} = 147 \text{ cm} (0,948; -0,316)$$

$$\boxed{\vec{L} = (139,36; -19,99) \text{ cm}}$$

d)

$$\boxed{\vec{L} = (139,36 \vec{i} - 19,99 \vec{j}) \text{ cm}}$$

9. Expresar el vector $\vec{H} = (-29 \vec{i} + 35 \vec{j}) \text{ m/s}$ en:

- a) Coordenadas rectangulares
- b) Función de su modulo y unitario
- c) Coordenadas polares
- d) Coordenadas geográficas

SOLUCIÓN:

a)

$$\boxed{\vec{H} = (-29; 35) \text{ m/s}}$$

b)

$$|\vec{H}| = \sqrt{29^2 + 35^2}$$

$$|\vec{H}| = 45,45 \text{ m/s}$$

$$\vec{\mu}_H = \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|}$$

$$\vec{\mu}_H = \frac{(-29\vec{i} + 35\vec{j})\text{m/s}}{45,45\text{m/s}}$$

$$\vec{H} = 45,45\text{m/s}(-0,64\vec{i} + 0,77\vec{j})$$

$$\vec{\mu}_H = (-0,64\vec{i} + 0,77\vec{j})$$

c)

$$\tan \phi = \frac{0,64}{0,77}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{0,64}{0,77}\right)$$

$$\theta = 90^\circ + 39,73^\circ$$

$$\theta = 129,73$$

$$\phi = 39,73^\circ$$

$$\vec{H} = (45,45\text{m/s}; 129,73^\circ)$$

d)

$$\vec{H} = (45,45\text{m/s}; \text{N } 39,73^\circ \text{O})$$

10. Expresar el vector $\vec{E} = (9\vec{i} + 12\vec{j})\text{m/s}^2$ en:

- a) Coordenadas rectangulares
- b) Coordenadas polares
- c) Coordenadas geográficas
- d) Función de su modulo y unitario

SOLUCIÓN:

a)

$$\vec{E} = (9; 12)\text{m/s}^2$$

b)

$$|\vec{E}| = \sqrt{9^2 + 12^2}$$

$$|\vec{E}| = 15\text{m/s}^2$$

$$\tan \theta = \frac{12}{9}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{12}{9}\right)$$

$$\theta = 53,13^\circ$$

$$\vec{E} = (15\text{m/s}^2; 53,13^\circ)$$

c)

$$\phi = 90^\circ - 53,13^\circ$$

$$\phi = 36,87^\circ$$

$$\vec{E} = (15 \text{ m/s}^2; \text{N } 36,87^\circ \text{ E})$$

d)

$$\vec{\mu}_E = \frac{\vec{E}}{|\vec{E}|}$$

$$\vec{\mu}_E = \frac{(9\vec{i} + 12\vec{j}) \text{ m/s}^2}{15 \text{ m/s}^2}$$

$$\vec{E} = 15 \text{ m/s}^2 (0,6\vec{i} + 0,8\vec{j})$$

$$\vec{\mu}_E = (0,6\vec{i} + 0,8\vec{j})$$

11. Expresa en función de sus vectores base los siguientes vectores:

a) $\vec{A} = (65 \text{ km/h}, 121^\circ)$

SOLUCIÓN:

$$A_x = |\vec{A}| \cos \theta$$

$$A_y = |\vec{A}| \sin \theta$$

$$A_x = 65 \text{ km/h} \cos 121^\circ$$

$$A_y = 65 \text{ km/h} \sin 121^\circ$$

$$A_x = -33,48 \text{ km/h}$$

$$A_y = 55,72 \text{ km/h}$$

$$\vec{A} = (-33,48\vec{i} + 55,72\vec{j}) \text{ km/h}$$

b) $\vec{B} = (70 \text{ N}, \text{NE})$

SOLUCIÓN:

$$B_x = |\vec{B}| \cos \theta$$

$$B_x = 70 \text{ N} \cos 45^\circ$$

$$B_x = 49,5 \text{ N}$$

$$\vec{B} = (49,5\vec{i} + 49,5\vec{j}) \text{ N}$$

c) $\vec{C} = 120 \text{ km} (0,873\vec{i} - 0,488\vec{j})$

SOLUCIÓN:

$$\vec{C} = (104,76 \vec{i} - 58,56 \vec{j}) \text{ km}$$

d) $\vec{D} = (-13, 40) \text{ N}$

SOLUCIÓN:

$$\vec{D} = (-13 \vec{i} + 40 \vec{j}) \text{ N}$$

EJERCICIO N° 4

1. Si la magnitud de los vectores $\vec{F}$ y $\vec{G}$ son 40m y 30m respectivamente, determinar:

- La magnitud máxima del vector resultante de la suma vectorial de $\vec{F} + \vec{G}$
- La magnitud mínima del vector resultante de la suma vectorial de $\vec{F} + \vec{G}$
- La magnitud del vector resultante de la suma vectorial en caso de que $\vec{F}$ y $\vec{G}$ sean perpendiculares
- La magnitud máxima del vector resultante de la resta vectorial de $\vec{F} - \vec{G}$

SOLUCIÓN:

a)

$$\vec{F} = (40 \vec{i} + 0 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{G} = (30 \vec{i} + 0 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{R} = (70 \vec{i} + 0 \vec{j}) \text{ m}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{70^2} = 70 \text{ m}$$

b)

$$\vec{F} = (40 \vec{i} + 0 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{G} = (-30 \vec{i} + 0 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{R} = (10 \vec{i} + 0 \vec{j}) \text{ m}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{10^2} = 10 \text{ m}$$

c)

$$\vec{F} = (40 \vec{i} + 0 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{G} = (0 \vec{i} + 30 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{R} = (40 \vec{i} + 30 \vec{j}) \text{ m}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ m}$$

d)

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (40\vec{i} + 0\vec{j})\text{m} & \vec{F} &= (40\vec{i} + 0\vec{j})\text{m} & \vec{G} &= (-30\vec{i} + 0\vec{j})\text{m} \\ -\vec{G} &= (30\vec{i} + 0\vec{j})\text{m} \\ \hline \vec{R} &= (70\vec{i} + 0\vec{j})\text{m} & |\vec{R}| &= \sqrt{70^2} = 70\text{m}\end{aligned}$$

2. Dados los vectores $\vec{F} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$ y $\vec{G} = -6\vec{i} - \vec{j}$, encontrar:

- El ángulo formado por los vectores
- El área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{F}$ y $\vec{G}$
- El vector unitario en la dirección de $(\vec{F} - 2\vec{G})$

SOLUCIÓN:

a)

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1} \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{G}}{|\vec{F}| \cdot |\vec{G}|} \right) \\ \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{4 \times -6 + 6 \times -1}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{37}} \right) & |\vec{F}| &= \sqrt{4^2 + 6^2} & |\vec{G}| &= \sqrt{6^2 + 1} \\ \theta &= 133,15^\circ & |\vec{F}| &= 7,21 & |\vec{G}| &= 6,08\end{aligned}$$

b)

$$\text{Área} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = (-4 + 36) = 32\text{u}^2$$

c)

$$\vec{F} = 4\vec{i} + 6\vec{j} \quad \vec{G} = -6\vec{i} - \vec{j} \quad 2\vec{G} = -12\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\begin{aligned}(\vec{F} - 2\vec{G}) &= (4\vec{i} + 6\vec{j}) - (-12\vec{i} - 2\vec{j}) & \overrightarrow{\mu_{\vec{F}-2\vec{G}}} &= \frac{(16\vec{i} + 8\vec{j})}{\sqrt{16^2 + 8^2}} \\ (\vec{F} - 2\vec{G}) &= (16\vec{i} + 8\vec{j}) & \overrightarrow{\mu_{\vec{F}-2\vec{G}}} &= 0,89\vec{i} + 0,45\vec{j}\end{aligned}$$

3. Dado el vector $\vec{Q} = (3, -5)\text{m}$, encontrar:

- Un vector $\vec{P}$ perpendicular a $\vec{Q}$, de modo que su módulo sea de 17m y la coordenada **Y** sea positiva

- b) El área del paralelogramo formado por $\vec{Q}$ y $\vec{P}$
 c) La proyección de $\vec{Q}$ sobre $\vec{P}$

SOLUCIÓN:

a)

$$\vec{Q} = (3, -5)\text{m}$$

$$\vec{Q} \cdot \vec{P} = 0$$

$$\vec{Q} \cdot \vec{P} = (3 \times P_x - 5 \times P_y)$$

$$(3 \times P_x - 5 \times P_y) = 0$$

$$3 \times P_x = 5 \times P_y$$

$$\vec{P} = (5\vec{i} + 3\vec{j})\text{m}$$

$$\vec{\mu}_P = \frac{(5\vec{i} + 3\vec{j})\text{m}}{\sqrt{5^2 + 3^2}}$$

$$\vec{\mu}_P = (0,86\vec{i} + 0,51\vec{j})$$

$$\vec{P} = 17\text{m}(0,86\vec{i} + 0,51\vec{j})$$

$$\vec{P} = (14,62\vec{i} + 8,67\vec{j})\text{m}$$

b)

$$\text{Área} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 14,62 & 8,67 \end{vmatrix} = (26,01 + 73,1) = 99,11\text{m}^2$$

c)

Los vectores son perpendiculares por lo tanto la proyección es cero

4. Dados los vectores $\vec{P} = (12\vec{i} - 8\vec{j})\text{m/s}$ $\vec{Q} = (15\text{m/s}, 120^\circ)$, encontrar:

- a) $\vec{P} - \vec{Q}$
 b) $\vec{Q} + \vec{P}$
 c) $3/2\vec{P}$
 d) $\vec{Q} \cdot \vec{P}$
 e) El ángulo formado entre $\vec{Q}$ y $\vec{P}$

SOLUCIÓN:

$$\vec{Q} = (15\text{m/s}, 120^\circ)$$

$$\begin{aligned}
 Q_x &= |\vec{Q}| \cos \theta & Q_y &= |\vec{Q}| \sin \theta \\
 Q_x &= 15 \text{ m/s} \cos 120^\circ & Q_y &= 15 \text{ m/s} \sin 120^\circ & \vec{Q} &= (-7,5 \vec{i} + 12,99 \vec{j}) \text{ m/s} \\
 Q_x &= -7,5 \text{ m/s} & Q_y &= 12,99 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned}
 \vec{P} &= (12 \vec{i} - 8 \vec{j}) \text{ m/s} \\
 -\vec{Q} &= (7,5 \vec{i} - 12,99 \vec{j}) \text{ m/s} \\
 \hline
 \vec{P} - \vec{Q} &= (19,5 \vec{i} - 20,99 \vec{j}) \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \vec{Q} &= (-7,5 \vec{i} + 12,99 \vec{j}) \text{ m/s} \\
 + \vec{P} &= (12 \vec{i} - 8 \vec{j}) \text{ m/s} \\
 \hline
 \vec{Q} + \vec{P} &= (4,5 \vec{i} + 4,99 \vec{j}) \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{2} \vec{P} &= \frac{3}{2} (12 \vec{i} - 8 \vec{j}) \text{ m/s} \\
 \frac{3}{2} \vec{P} &= (18 \vec{i} - 12 \vec{j}) \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 \vec{Q} \cdot \vec{P} &= (-7,5 \times 12 + 12,99 \times -8) \text{ m/s} \\
 \vec{Q} \cdot \vec{P} &= -193,92 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
 \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{(-7,5 \times 12 + 12,99 \times -8)}{(15 \text{ m/s})(\sqrt{12^2 + 8^2})} \right) \\
 \theta &= 93,56^\circ
 \end{aligned}$$

f)

$$\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} 12 & -8 \\ -7,5 & 12,99 \end{vmatrix} = (155,88 + 60) \vec{k} = 215,88 \vec{k}$$

5. Dados los vectores $\vec{M} = (37, 25) \text{ m}$ $\vec{N} = (41 \text{ m}, 213^\circ)$, hallar:

- a) $\vec{M} + \vec{N}$
- b) $\vec{N} - \vec{M}$
- c) $-2\vec{N}$
- d) $\vec{N} \cdot \vec{M}$
- e) La proyección de $\vec{N}$ sobre $\vec{M}$
- f) El área del paralelogramo formado por los dos vectores

SOLUCIÓN:

a)

$$N_x = |\vec{N}| \cos \theta \quad N_y = |\vec{N}| \sin \theta$$

$$N_x = 41 \text{ m} \cos 213^\circ \quad N_y = 41 \text{ m} \sin 213^\circ \quad \vec{N} = (-34,39 \vec{i} - 22,33 \vec{j}) \text{ m}$$

$$N_x = -34,39 \text{ m} \quad N_y = -22,33 \text{ m}$$

$$\vec{M} = (37 \vec{i} + 25 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{N} = (-34,39 \vec{i} - 22,33 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{M} + \vec{N} = (2,61 \vec{i} + 2,67 \vec{j}) \text{ m}$$

b)

$$\vec{N} = (-34,39 \vec{i} - 22,33 \vec{j}) \text{ m}$$

$$-\vec{M} = (-37 \vec{i} - 25 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{N} - \vec{M} = (-71,39 \vec{i} - 47,33 \vec{j}) \text{ m}$$

c)

$$-2\vec{N} = -2(-34,39 \vec{i} - 22,33 \vec{j}) \text{ m}$$

$$-2\vec{N} = (68,78 \vec{i} + 44,66 \vec{j}) \text{ m}$$

d)

$$\vec{N} \cdot \vec{M} = (-34,39 \times 37 - 22,33 \times 25)$$

$$\vec{N} \cdot \vec{M} = -1830,68$$

e)

$$\vec{N}_M = \frac{\vec{N} \cdot \vec{M}}{|\vec{M}|} \times \vec{\mu}_M$$

$$\vec{N}_M = \frac{(-34,39 \times 37 - 22,33 \times 25)}{\sqrt{37^2 + 25^2}} \times \left(\frac{(37\vec{i} + 25\vec{j})\text{m}}{\sqrt{37^2 + 25^2}} \right) \quad \begin{aligned} |\vec{N}_M| &= \sqrt{33,97^2 + 22,95^2} \\ |\vec{N}_M| &= 40,99\text{m} \end{aligned}$$

$$\vec{N}_M = (-33,97\vec{i} - 22,95\vec{j})\text{m}$$

f)

$$\text{Área} = \begin{vmatrix} 37 & 25 \\ -34,39 & -22,33 \end{vmatrix} = (-826,21 + 934,75) = 33,54\text{m}^2$$

6. Dados los vectores $\vec{E} = 15\text{N}(\vec{m}\vec{i} + 0,48\vec{j})$; $\vec{I} = (21\text{N}, \text{SE})$ y $\vec{F} = (12\text{N}, 312^\circ)$, hallar:

- a) $\vec{E} + \vec{I} + \vec{F}$
- b) $2/3\vec{I} - 3\vec{E} + 5/2\vec{F}$
- c) $2/5(\vec{F} \cdot \vec{E})$
- d) $(3\vec{I} \times 2\vec{F})$
- e) La proyección de $\vec{E}$ sobre el vector resultante de $(\vec{I} + \vec{F})$
- f) El ángulo comprendido entre los vectores $\vec{F}$ y $\vec{E}$

SOLUCIÓN:

$$\vec{E} = 15\text{N}(\vec{m}\vec{i} + 0,48\vec{j})$$

$$\vec{I} = (21\text{N}, \text{SE})$$

$$m = \sqrt{1 - (0,48^2)}$$

$$m = 0,88$$

$$\theta = 270^\circ + 45^\circ$$

$$\theta = 315^\circ$$

$$\vec{E} = 15\text{N}(0,88\vec{i} + 0,48\vec{j})$$

$$\Rightarrow \vec{E} = (13,2\vec{i} + 7,2\vec{j})$$

$$I_x = |\vec{I}| \cos \theta$$

$$I_x = 21\text{N} \cos 315^\circ$$

$$I_x = 14,85$$

$$I_y = |\vec{I}| \sin \theta$$

$$I_y = 21\text{N} \sin 315^\circ$$

$$I_y = -14,85$$

$$\vec{I} = (14,85\vec{i} - 14,85\vec{j})\text{N}$$

$$\vec{F} = (12 \text{ N}, 312^\circ)$$

$$\begin{aligned} F_x &= |\vec{F}| \cos \theta & F_y &= |\vec{F}| \sin \theta \\ F_x &= 12 \text{ N} \cos 312^\circ & F_y &= 12 \text{ N} \sin 312^\circ \\ F_x &= 8,03 & F_y &= -15,60 \end{aligned}$$

$$\vec{F} = (8,03 \vec{i} - 15,60 \vec{j}) \text{ N}$$

a)

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (13,2 \vec{i} + 7,2 \vec{j}) \text{ N} \\ \vec{I} &= (14,85 \vec{i} - 14,85 \vec{j}) \text{ N} \\ \vec{F} &= (8,03 \vec{i} - 15,60 \vec{j}) \text{ N} \\ \hline \vec{E} + \vec{I} + \vec{F} &= (36,08 \vec{i} - 23,25 \vec{j}) \text{ N} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2/3 \vec{I} &= \frac{2}{3} (14,85 \vec{i} - 14,85 \vec{j}) \text{ N} & -3\vec{E} &= -3(13,2 \vec{i} + 7,2 \vec{j}) \text{ N} \\ 2/3 \vec{I} &= (9,9 \vec{i} - 9,9 \vec{j}) \text{ N} & -3\vec{E} &= (-39,6 \vec{i} - 21,6 \vec{j}) \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5/2 \vec{F} &= \frac{5}{2} (8,03 \vec{i} - 15,60 \vec{j}) \text{ N} \\ 5/2 \vec{F} &= (20,08 \vec{i} - 39 \vec{j}) \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2/3 \vec{I} &= (9,9 \vec{i} - 9,9 \vec{j}) \text{ N} \\ -3\vec{E} &= (-39,6 \vec{i} - 21,6 \vec{j}) \text{ N} \\ 5/2 \vec{F} &= (20,08 \vec{i} - 39 \vec{j}) \text{ N} \\ \hline 2/3 \vec{I} - 3\vec{E} + 5/2 \vec{F} &= (-9,62 \vec{i} - 70,5 \vec{j}) \text{ N} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 2/5 (\vec{F} \cdot \vec{E}) &= \frac{2}{5} (8,03 \times 13,2 - 15,60 \times 7,2) \\ \vec{F} \cdot \vec{E} &= -2,53 \end{aligned}$$

d)

$$3\vec{I} = 3(14,85\vec{i} - 14,85\vec{j})\text{N} \quad 2\vec{F} = 2(8,03\vec{i} - 15,60\vec{j})\text{N}$$

$$3\vec{I} = (44,55\vec{i} - 44,45\vec{j})\text{N} \quad 2\vec{F} = (16,06\vec{i} - 31,2\vec{j})\text{N}$$

$$3\vec{I} \times 2\vec{F} = \begin{vmatrix} 44,55 & -44,55 \\ 16,06 & -31,2 \end{vmatrix} \vec{k} = (-1389,96 + 715,47)\vec{k} = -674,49\vec{k}$$

e) La proyección de $\vec{E}$ sobre el vector resultante de $(\vec{I} + \vec{F})$

$$\vec{I} = (14,85\vec{i} - 14,85\vec{j})\text{N}$$

$$\vec{F} = (8,03\vec{i} - 15,60\vec{j})\text{N}$$

$$\vec{I} + \vec{F} = (22,88\vec{i} - 30,45\vec{j})\text{N}$$

$$\overrightarrow{E_{I+F}} = \frac{\vec{E} \cdot \overrightarrow{I+F}}{|\overrightarrow{I+F}|} \times \overrightarrow{\mu_{I+F}}$$

$$\overrightarrow{E_{I+F}} = \frac{(13,2 \times 22,88 + 7,2 \times -30,45)}{\sqrt{22,88^2 + 30,45^2}} \times \left(\frac{(22,88\vec{i} - 30,45\vec{j})}{\sqrt{22,88^2 + 30,45^2}} \right)$$

$$\overrightarrow{E_{I+F}} = (1,30\vec{i} - 1,73\vec{j})\text{m}$$

$$|\overrightarrow{E_{I+F}}| = \sqrt{1,30^2 + 1,73^2}$$

$$|\overrightarrow{E_{I+F}}| = 2,16$$

f)

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{8,03 \times 13,2 - 15,60 \times 7,2}{15 \times 12} \right)$$

$$\theta = 92,01^\circ$$

7. Dados los vectores $\vec{A} = 31\text{m/s}(0,2\vec{i} + m\vec{j})$; $\vec{B} = (43\text{m/s}, 172^\circ)$ y

$\vec{C} = (55, -12)\text{m/s}$, hallar:

a) $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$

b) $1/2\vec{A} + \vec{B} - 2\vec{C}$

- c) El área del paralelogramo formado por $2\vec{A}$ y $\frac{2}{3}\vec{C}$
- d) La proyección de $(\vec{A} + \vec{B})$ sobre $\vec{C}$
- e) $(\vec{A} \times \vec{C}) + (\vec{A} \times \vec{B})$
- f) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$

SOLUCIÓN:

$$\vec{A} = 31\text{m/s}(0,2\vec{i} + m\vec{j}) \quad \vec{B} = (43\text{m/s}, 172^\circ)$$

$$m = \sqrt{1 - (0,2)^2}$$

$$m = 0,98$$

$$B_x = |\vec{B}| \cos \theta \quad B_y = |\vec{B}| \sin \theta$$

$$B_x = 43\text{m/s} \cos 172^\circ \quad B_y = 43\text{m/s} \sin 172^\circ$$

$$B_x = -41,59 \quad B_y = 5,98$$

$$\vec{A} = 31\text{m/s}(0,2\vec{i} + 0,98\vec{j})$$

$$\Rightarrow \vec{A} = (6,2\vec{i} + 30,38\vec{j})\text{m/s}$$

$$\vec{B} = (-41,59\vec{i} + 5,98\vec{j})\text{m/s}$$

$$\vec{C} = (55\vec{i} - 12\vec{j})\text{m/s}$$

a)

$$\vec{A} = (6,2\vec{i} + 30,38\vec{j})\text{m/s}$$

$$-\vec{B} = (41,59\vec{i} - 5,98\vec{j})\text{m/s}$$

$$\vec{C} = (55\vec{i} - 12\vec{j})\text{m/s}$$

$$\vec{A} - \vec{B} + \vec{C} = (102,79\vec{i} + 12,4\vec{j})\text{m/s}$$

b) $1/2\vec{A} + \vec{B} - 2\vec{C}$

$$1/2\vec{A} = \frac{1}{2}(6,2\vec{i} + 30,38\vec{j})\text{m/s} \quad -2\vec{C} = -2(55\vec{i} - 12\vec{j})\text{m/s}$$

$$1/2\vec{A} = (3,1\vec{i} + 15,19\vec{j})\text{m/s} \quad -2\vec{C} = (-110\vec{i} + 24\vec{j})\text{m/s}$$

$$\begin{aligned}
 1/2\vec{A} &= (3,1\vec{i} + 15,19\vec{j})\text{m/s} \\
 \vec{B} &= (-41,59\vec{i} + 5,98\vec{j})\text{m/s} \\
 -2\vec{C} &= (-110\vec{i} + 24\vec{j})\text{m/s} \\
 \hline
 1/2\vec{A} + \vec{B} - 2\vec{C} &= (-148,49\vec{i} + 45,17\vec{j})\text{m/s}
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 2\vec{A} &= 2(6,2\vec{i} + 30,38\vec{j})\text{m/s} & 2/3\vec{C} &= \frac{2}{3}(55\vec{i} - 12\vec{j})\text{m/s} \\
 2\vec{A} &= (12,4\vec{i} + 60,76\vec{j})\text{m/s} & 2/3\vec{C} &= (36,66\vec{i} - 8\vec{j})\text{m/s}
 \end{aligned}$$

$$\text{Área} = \begin{vmatrix} 12,4 & 60,76 \\ 36,66 & -8 \end{vmatrix} = |-99,2 - 934,75| = 2326,66$$

d) La proyección de $(\vec{A} + \vec{B})$ sobre $\vec{C}$

$$\begin{aligned}
 \vec{A} &= (6,2\vec{i} + 30,38\vec{j})\text{m/s} \\
 \vec{B} &= (-41,59\vec{i} + 5,98\vec{j})\text{m/s} & \vec{C} &= (55\vec{i} - 12\vec{j})\text{m/s} \\
 \hline
 \vec{A} + \vec{B} &= (-35,39\vec{i} + 36,36\vec{j})\text{m/s}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{(\vec{A} + \vec{B})}_C &= \frac{\vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{C}|} \times \overline{\mu_C} \\
 \overline{(\vec{A} + \vec{B})}_C &= \frac{(-35,39 \times 55 + 36,36 \times -12)}{\sqrt{55^2 + 12^2}} \times \left(\frac{(55\vec{i} - 12\vec{j})}{\sqrt{55^2 + 12^2}} \right) \\
 \overline{(\vec{A} + \vec{B})}_C &= (-41,35\vec{i} + 9,02\vec{j})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\overline{(\vec{A} + \vec{B})}_C| &= \sqrt{41,35^2 + 9,02^2} \\
 |\overline{(\vec{A} + \vec{B})}_C| &= 42,32
 \end{aligned}$$

e)

$$\vec{A} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} 6,2 & 30,38 \\ 55 & -12 \end{vmatrix} = (-74,4 - 1670,9) \vec{k} = -1745,3 \vec{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} 6,2 & 30,38 \\ -41,59 & 5,98 \end{vmatrix} = (-37,08 + 1263,5) \vec{k} = 1226,42 \vec{k}$$

$$(\vec{A} \times \vec{C}) + (\vec{A} \times \vec{B}) = -1745,3 \vec{k} + 1226,42 \vec{k}$$

$$(\vec{A} \times \vec{C}) + (\vec{A} \times \vec{B}) = -518,88 \vec{k}$$

f)

$\vec{B} \times \vec{C}$ es producto cruz por tanto es perpendicular al vector $\vec{A}$ entonces

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$$

8. Tomando en consideración los vectores $\vec{R} = (20\text{m}, \text{N } 25^\circ \text{O})$; $\vec{S} = (15\vec{i} + 9\vec{j})\text{m}$;

$\vec{T} = (30\text{m}, 260^\circ)$ y $\vec{U} = 17\text{m} (0,5\vec{i} - 0,866\vec{j})$, hallar:

a) $3/4(\vec{S}) - 2\vec{R} + \vec{U}$

b) $5\vec{U} - 1/2\vec{T} + \vec{R} - 2\vec{S}$

c) $(\vec{R} \cdot \vec{S}) + (\vec{T} \cdot \vec{U})$

d) $(\vec{T} \times \vec{U}) + (\vec{R} \times \vec{S})$

e) $(3\vec{R}) \cdot 2(\vec{T})$

f) La proyección de $(\vec{R} + \vec{S})$ sobre $(\vec{T} - \vec{U})$

g) El área del paralelogramo formado por $(\vec{R} - \vec{T})$ y $(\vec{S} + \vec{U})$

SOLUCIÓN:

$$\vec{R} = (20\text{m}, \text{N } 25^\circ \text{O})$$

$$\vec{T} = (30\text{m}, 260^\circ)$$

$$\theta = 90^\circ + 25^\circ$$

$$\theta = 115^\circ$$

$$R_x = |\vec{R}| \cos \theta$$

$$R_y = |\vec{R}| \sin \theta$$

$$T_x = |\vec{T}| \cos \theta$$

$$T_y = |\vec{T}| \sin \theta$$

$$R_x = 20 \text{ m} \cos 115^\circ$$

$$R_y = 20 \text{ m} \sin 115^\circ$$

$$T_x = 30 \text{ m} \cos 260^\circ$$

$$T_y = 30 \text{ m} \sin 260^\circ$$

$$R_x = -8,45 \text{ m}$$

$$R_y = 18,13 \text{ m}$$

$$T_x = -5,21 \text{ m}$$

$$T_y = -29,54 \text{ m}$$

$$\vec{R} = (-8,45 \vec{i} + 18,13 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{T} = (-5,21 \vec{i} - 29,54 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{U} = 17 \text{ m} (0,5 \vec{i} - 0,866 \vec{j})$$

$$\vec{U} = (8,5 \vec{i} - 14,72 \vec{j}) \text{ m}$$

a)

$$3/4 \vec{S} = \frac{3}{4} (15 \vec{i} + 9 \vec{j}) \text{ m} \quad -2\vec{R} = -2(-8,45 \vec{i} + 18,13 \vec{j}) \text{ m}$$

$$3/4 \vec{S} = (11,25 \vec{i} + 6,75 \vec{j}) \text{ m} \quad -2\vec{R} = (16,9 \vec{i} - 36,26 \vec{j}) \text{ m}$$

$$3/4 \vec{S} = (11,25 \vec{i} + 6,75 \vec{j}) \text{ m}$$

$$-2\vec{R} = (16,9 \vec{i} - 36,26 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{U} = (8,5 \vec{i} - 14,72 \vec{j}) \text{ m}$$

$$3/4 \vec{S} - 2\vec{R} + \vec{U} = (36,65 \vec{i} - 44,23 \vec{j}) \text{ m}$$

b)

$$5\vec{U} = 5(8,5 \vec{i} - 14,72 \vec{j}) \text{ m}$$

$$-1/2 \vec{T} = -\frac{1}{2} (-5,21 \vec{i} - 29,54 \vec{j}) \text{ m}$$

$$5\vec{U} = (42,5 \vec{i} - 73,6 \vec{j}) \text{ m}$$

$$-1/2 \vec{T} = (2,6 \vec{i} + 14,77 \vec{j}) \text{ m}$$

$$-2\vec{S} = -2(15 \vec{i} + 9 \vec{j}) \text{ m}$$

$$-2\vec{S} = (-30 \vec{i} - 18 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\begin{aligned}
5\vec{U} &= (42,5\vec{i} - 73,6\vec{j})\text{m} \\
-1/2\vec{T} &= (2,6\vec{i} + 14,77\vec{j})\text{m} \\
\vec{R} &= (-8,45\vec{i} + 18,13\vec{j})\text{m} \\
-2\vec{S} &= (-30\vec{i} - 18\vec{j})\text{m} \\
\hline
5\vec{U} - 1/2\vec{T} + \vec{R} - 2\vec{S} &= (6,65\vec{i} - 58,7\vec{j})\text{m}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\vec{R} \cdot \vec{S} &= (-8,45 \times 15 + 18,13 \times 9) \\
\vec{R} \cdot \vec{S} &= 36,42
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{T} \cdot \vec{U} &= (-5,21 \times 8,5 - 29,54 \times -14,72) \\
\vec{T} \cdot \vec{U} &= 390,54
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{R} \cdot \vec{S}) + (\vec{T} \cdot \vec{U}) &= 36,42 + 390,54 \\
(\vec{R} \cdot \vec{S}) + (\vec{T} \cdot \vec{U}) &= 426,96
\end{aligned}$$

d)

$$\vec{T} \times \vec{U} = \begin{vmatrix} -5,21 & -29,54 \\ 8,5 & -14,72 \end{vmatrix} = (76,69 + 251,09)\vec{k} = 327,78\vec{k}$$

$$\vec{R} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} -8,45 & 18,13 \\ 15 & 9 \end{vmatrix} = (-76,05 - 271,95)\vec{k} = -348\vec{k}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{T} \times \vec{U}) + (\vec{R} \times \vec{S}) &= 327,78\vec{k} - 348\vec{k} \\
(\vec{T} \times \vec{U}) + (\vec{R} \times \vec{S}) &= -20,22\vec{k}
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
3\vec{R} &= 3(-8,45\vec{i} + 18,13\vec{j})\text{m} & 2\vec{T} &= 2(-5,21\vec{i} - 29,54\vec{j})\text{m} \\
3\vec{R} &= (-25,35\vec{i} + 54,39\vec{j})\text{m} & 2\vec{T} &= (-10,42\vec{i} - 59,08\vec{j})\text{m}
\end{aligned}$$

$$(3\vec{R}) \cdot 2(\vec{T}) = (-25,35 \times -10,42 + 54,39 \times -59,08)$$

$$(3\vec{R}) \cdot 2(\vec{T}) = -2949,21$$

f)

$$\vec{R} = (-8,45\vec{i} + 18,13\vec{j})\text{m}$$

$$\vec{T} = (-5,21\vec{i} - 29,54\vec{j})\text{m}$$

$$\vec{S} = (15\vec{i} + 9\vec{j})\text{m}$$

$$-\vec{U} = (-8,5\vec{i} + 14,72\vec{j})\text{m}$$

$$\vec{R} + \vec{S} = (6,55\vec{i} + 27,13\vec{j})\text{m}$$

$$\vec{T} - \vec{U} = (-13,71\vec{i} - 14,82\vec{j})\text{m}$$

$$\overrightarrow{(\vec{R} + \vec{S})_{\text{T-U}}} = \frac{\vec{R} + \vec{S} \cdot \vec{T} - \vec{U}}{|\vec{T} - \vec{U}|} \times \overrightarrow{\mu_{\text{T-U}}}$$

$$\overrightarrow{(\vec{R} + \vec{S})_{\text{T-U}}} = \frac{(6,55 \times -13,71 + 27,13 \times -14,82)}{\sqrt{13,71^2 + 14,82^2}} \times \left(\frac{(-13,71\vec{i} - 14,82\vec{j})}{\sqrt{13,71^2 + 14,82^2}} \right)$$

$$\overrightarrow{(\vec{R} + \vec{S})_{\text{T-U}}} = (16,54\vec{i} + 17,88\vec{j})$$

$$|\overrightarrow{(\vec{R} + \vec{S})_{\text{T-U}}}| = \sqrt{16,54^2 + 17,88^2}$$

$$|\overrightarrow{(\vec{R} + \vec{S})_{\text{T-U}}}| = 24,36$$

g)

$$\vec{R} = (-8,45\vec{i} + 18,13\vec{j})\text{m}$$

$$\vec{S} = (15\vec{i} + 9\vec{j})\text{m}$$

$$-\vec{T} = (5,21\vec{i} + 29,54\vec{j})\text{m}$$

$$\vec{U} = (8,5\vec{i} - 14,72\vec{j})\text{m}$$

$$\vec{R} - \vec{T} = (-3,24\vec{i} + 47,67\vec{j})\text{m}$$

$$\vec{S} + \vec{U} = (23,5\vec{i} - 5,72\vec{j})\text{m}$$

$$\text{Área} = \begin{vmatrix} -3,24 & 47,67 \\ 23,5 & -5,72 \end{vmatrix} = |18,53 - 1120,24| = 1101,71$$

9. Considérese los vectores $\vec{A} = 46\text{cm}(\vec{m}\vec{i} - 0,23\vec{j})$; $\vec{B} = (81\text{cm}, 155^\circ)$,

$\vec{C} = (57\text{cm}, \text{N}21^\circ \text{E})$ y $\vec{D} = (-32\vec{i} - 29\vec{j})\text{m}$, determinar:

a) $1/2 \vec{A} + 2\vec{C} - \vec{B}$

- b) $2\vec{D} - 3\vec{A} + 1/3\vec{C} - 2/5\vec{B}$
 c) $(3\vec{B} + 2/3\vec{A}) \cdot (-\vec{C} - 3/4\vec{D})$
 d) $(\vec{D} - 3\vec{C}) \times (3/2\vec{B} + 4\vec{A})$
 e) $(\vec{B} \cdot \vec{A}) + (\vec{C} \cdot \vec{D})$
 f) $(2\vec{A} \times \vec{C}) + (5\vec{B} \times \vec{D})$
 g) El ángulo formado por $(\vec{D} - \vec{A})$ y $(\vec{B} + \vec{C})$

SOLUCIÓN:

$$\vec{A} = 46 \text{ cm} (\vec{i} - 0,23 \vec{j})$$

$$\vec{B} = (81 \text{ cm}, 155^\circ)$$

$$m = \sqrt{1 - (0,48^2)}$$

$$m = 0,88$$

$$B_x = |\vec{B}| \cos \theta$$

$$B_y = |\vec{B}| \sin \theta$$

$$B_x = 81 \text{ cm} \cos 155^\circ$$

$$B_y = 81 \text{ cm} \sin 155^\circ$$

$$B_x = -73,41 \text{ cm}$$

$$B_y = 34,23 \text{ cm}$$

$$\vec{A} = 46 \text{ cm} (0,88 \vec{i} - 0,23 \vec{j})$$

$$\Rightarrow \vec{A} = (40,48 \vec{i} - 10,58 \vec{j})$$

$$\vec{B} = (-73,41 \vec{i} + 34,23 \vec{j}) \text{ cm}$$

$$\vec{C} = (57 \text{ cm}, N 21^\circ E)$$

$$\theta = 90^\circ - 21^\circ$$

$$\theta = 69^\circ$$

$$C_x = |\vec{C}| \cos \theta$$

$$C_y = |\vec{C}| \sin \theta$$

$$C_x = 57 \text{ cm} \cos 69^\circ$$

$$C_y = 57 \text{ cm} \sin 69^\circ$$

$$C_x = 20,43 \text{ cm}$$

$$C_y = 53,21 \text{ cm}$$

$$\vec{C} = (20,43 \vec{i} + 53,21 \vec{j}) \text{ cm}$$

a)

$$1/2\vec{A} = \frac{1}{2}(40,48 \vec{i} - 10,58 \vec{j}) \text{ cm}$$

$$2\vec{C} = 2(20,43 \vec{i} + 53,21 \vec{j}) \text{ cm}$$

$$1/2\vec{A} = (20,24 \vec{i} - 5,29 \vec{j}) \text{ cm}$$

$$2\vec{C} = (40,86 \vec{i} + 106,42 \vec{j}) \text{ cm}$$

$$\vec{B} = (-73, 41\vec{i} + 34, 23\vec{j}) \text{ cm}$$

$$1/2\vec{A} = (20, 24\vec{i} - 5, 29\vec{j})$$

$$2\vec{C} = (40, 86\vec{i} + 106, 42\vec{j})$$

$$-\vec{B} = (73, 41\vec{i} - 34, 23\vec{j})$$

$$1/2\vec{A} + 2\vec{C} - \vec{B} = (134, 51\vec{i} + 66, 89\vec{j})$$

b)

$$2\vec{D} = 2(-32\vec{i} - 29\vec{j})$$

$$-3\vec{A} = -3(40, 48\vec{i} - 10, 58\vec{j})$$

$$2\vec{D} = (-64\vec{i} - 58\vec{j})$$

$$-3\vec{A} = (-121, 44\vec{i} + 31, 74\vec{j})$$

$$1/3\vec{C} = \frac{1}{3}(20, 43\vec{i} + 53, 21\vec{j})$$

$$-2/5\vec{B} = -\frac{2}{5}(-73, 41\vec{i} + 34, 23\vec{j})$$

$$1/3\vec{C} = (6, 81\vec{i} + 17, 73\vec{j})$$

$$-2/5\vec{B} = (29, 36\vec{i} - 13, 69\vec{j})$$

$$2\vec{D} = (-64\vec{i} - 58\vec{j})$$

$$-3\vec{A} = (-121, 44\vec{i} + 31, 74\vec{j})$$

$$1/3\vec{C} = (6, 81\vec{i} + 17, 73\vec{j})$$

$$-2/5\vec{B} = (29, 36\vec{i} - 13, 69\vec{j})$$

$$2\vec{D} - 3\vec{A} + 1/3\vec{C} - 2/5\vec{B} = (-149, 27\vec{i} - 22, 22\vec{j})$$

c)

$$3\vec{B} = 3(-73, 41\vec{i} + 34, 23\vec{j})$$

$$2/3\vec{A} = \frac{2}{3}(40, 48\vec{i} - 10, 58\vec{j})$$

$$3\vec{B} = (-220, 23\vec{i} + 102, 69\vec{j})$$

$$2/3\vec{A} = (26, 99\vec{i} - 7, 05\vec{j})$$

$$-4/3\vec{D} = -\frac{4}{3}(-32\vec{i} - 29\vec{j})$$

$$-4/3\vec{D} = (42, 66\vec{i} + 38, 66\vec{j})$$

$$\begin{array}{rcl}
3\vec{B} & = & (-220, 23\vec{i} + 102, 69\vec{j}) \\
2/3\vec{A} & = & (26, 99\vec{i} - 7, 05\vec{j}) \\
\hline
3\vec{B} + 2/3\vec{A} & = & (-193, 24\vec{i} + 95, 64\vec{j})
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
-\vec{C} & = & (-20, 43\vec{i} - 53, 21\vec{j}) \\
-4/3\vec{D} & = & (42, 66\vec{i} + 38, 66\vec{j}) \\
\hline
-\vec{C} - 4/3\vec{D} & = & (22, 23\vec{i} - 14, 55\vec{j})
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
(3\vec{B} + 2/3\vec{A}) \cdot (-\vec{C} - 4/3\vec{D}) &= (-193, 24 \times 22, 23 + 95, 64 \times -14, 55) \\
(3\vec{B} + 2/3\vec{A}) \cdot (-\vec{C} - 4/3\vec{D}) &= -5687, 28
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{array}{rcl}
-3\vec{C} & = & -3(20, 43\vec{i} + 53, 21\vec{j}) \\
-3\vec{C} & = & (-61, 29\vec{i} - 159, 63\vec{j}) \\
4\vec{A} & = & 4(40, 48\vec{i} - 10, 58\vec{j}) \\
4\vec{A} & = & (161, 92\vec{i} - 42, 32\vec{j}) \\
\vec{D} & = & (-32\vec{i} - 29\vec{j}) \\
-3\vec{C} & = & (-61, 29\vec{i} - 159, 63\vec{j}) \\
\hline
\vec{D} - 3\vec{C} & = & (-93, 29\vec{i} - 188, 63\vec{j})
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
3/2\vec{B} & = & \frac{3}{2}(-73, 41\vec{i} + 34, 23\vec{j}) \\
3/2\vec{B} & = & (-110, 12\vec{i} + 51, 35\vec{j}) \\
3/2\vec{B} & = & (-110, 12\vec{i} + 51, 35\vec{j}) \\
4\vec{A} & = & (161, 92\vec{i} - 42, 32\vec{j}) \\
\hline
3/2\vec{B} + 4\vec{A} & = & (51, 8\vec{i} + 9, 03\vec{j})
\end{array}$$

$$(\vec{D} - 3\vec{C}) \times (3/2\vec{B} + 4\vec{A}) = \begin{vmatrix} -93, 29 & -188, 63 \\ 51, 8 & 9, 03 \end{vmatrix} = (-842, 41 + 9771, 03)\vec{k} = 8928, 62\vec{k}$$

e)

$$\begin{array}{rcl}
\vec{B} \cdot \vec{A} & = & (-73, 41 \times 40, 48 + 34, 23 \times -10, 58) \\
\vec{B} \cdot \vec{A} & = & -3333, 79 \\
\vec{C} \cdot \vec{D} & = & (20, 43 \times -32 + 53, 21 \times -29) \\
\vec{C} \cdot \vec{D} & = & -2196, 85
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{B} \cdot \vec{A}) + (\vec{C} \cdot \vec{D}) &= -3333, 79 - 2196, 85 \\
(\vec{B} \cdot \vec{A}) + (\vec{C} \cdot \vec{D}) &= -5530, 64
\end{aligned}$$

$$f) (2\vec{A} \times \vec{C}) + (5\vec{B} \times \vec{D})$$

$$2\vec{A} = 2(40,48\vec{i} - 10,58\vec{j}) \quad 5\vec{B} = 5(-73,41\vec{i} + 34,23\vec{j})$$

$$2\vec{A} = (80,96\vec{i} - 21,16\vec{j}) \quad 5\vec{B} = (-367,05\vec{i} + 171,15\vec{j})$$

$$2\vec{A} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} 80,96 & -21,16 \\ 20,43 & 53,21 \end{vmatrix} = (4307,88 + 432,30)\vec{k} = 4740,18\vec{k}$$

$$g) \text{ El ángulo formado por } (\vec{D} - \vec{A}) \text{ y } (\vec{B} + \vec{C})$$

$$\vec{D} = (-32\vec{i} - 29\vec{j})$$

$$\vec{B} = (-73,41\vec{i} + 34,23\vec{j})$$

$$-\vec{A} = (-40,48\vec{i} + 10,58\vec{j})$$

$$\vec{C} = (20,43\vec{i} + 53,21\vec{j})$$

$$\vec{D} - \vec{A} = (-72,48\vec{i} - 18,42\vec{j})$$

$$\vec{B} + \vec{C} = (-52,98\vec{i} + 87,44\vec{j})$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{-72,48 \times -52,98 - 18,42 \times 87,44}{\left(\sqrt{72,48^2 + 18,42^2} \right) \left(\sqrt{52,98^2 + 87,44^2} \right)} \right)$$

$$\theta = 73,05^\circ$$

10. Dados los vectores $\vec{D} = (5\text{km}, 63^\circ)$, $\vec{E} = (-7, -1)\text{km}$ y $\vec{F} = (4\text{km}; S70^\circ E)$, calcular:

a) $2\vec{D} + \vec{E} + 3\vec{F}$

b) $\vec{E} - \vec{D} - 2\vec{F}$

c) $\vec{D} \cdot \vec{E}$

d) $\vec{D} - (\vec{E} \times \vec{F})$

e) La proyección de $\vec{E}$ sobre $\vec{D}$

f) El ángulo comprendido entre $\vec{E}$ y $\vec{F}$

g) El área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{D}$ y $\vec{E}$

SOLUCIÓN:

a)

$$\begin{aligned}
 D_x &= |\vec{D}| \cos \theta & D_y &= |\vec{D}| \sin \theta \\
 D_x &= 5 \text{ km} \cos 63^\circ & D_y &= 5 \text{ km} \sin 63^\circ & \vec{D} &= (2,27 \vec{i} + 4,46 \vec{j}) \text{ km} \\
 D_x &= 2,27 \text{ km} & D_y &= 4,46 \text{ km}
 \end{aligned}$$

$$\vec{E} = (-7 \vec{i} - 1 \vec{j}) \text{ km}$$

$$\theta = 270^\circ + 70^\circ$$

$$\theta = 340^\circ$$

$$\begin{aligned}
 F_x &= |\vec{F}| \cos \theta & F_y &= |\vec{F}| \sin \theta \\
 F_x &= 4 \text{ km} \cos 340^\circ & F_y &= 4 \text{ km} \sin 340^\circ & \vec{F} &= (3,76 \vec{i} - 1,37 \vec{j}) \text{ km} \\
 F_x &= 3,76 \text{ km} & F_y &= -1,37 \text{ km}
 \end{aligned}$$

$$2\vec{D} = 2(2,27 \vec{i} + 4,46 \vec{j}) \text{ km}$$

$$2\vec{D} = (4,54 \vec{i} + 8,92 \vec{j}) \text{ km}$$

$$3\vec{F} = 3(3,76 \vec{i} - 1,37 \vec{j}) \text{ km}$$

$$3\vec{F} = (11,28 \vec{i} - 4,11 \vec{j}) \text{ km}$$

$$2\vec{D} = (4,54 \vec{i} + 8,92 \vec{j}) \text{ km}$$

$$\vec{E} = (-7 \vec{i} - 1 \vec{j}) \text{ km}$$

$$3\vec{F} = (11,28 \vec{i} - 4,11 \vec{j}) \text{ km}$$

$$2\vec{D} + \vec{E} + 3\vec{F} = (8,82 \vec{i} + 3,81 \vec{j}) \text{ km}$$

b)

$$\vec{E} - \vec{D} - 2\vec{F}$$

$$-2\vec{F} = -2(3,76 \vec{i} - 1,37 \vec{j}) \text{ km}$$

$$-2\vec{F} = (-7,52 \vec{i} + 2,74 \vec{j}) \text{ km}$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} -7\vec{i} & -1\vec{j} \end{pmatrix} \text{km}$$

$$-\vec{D} = \begin{pmatrix} -2,27\vec{i} & -4,46\vec{j} \end{pmatrix} \text{km}$$

$$-2\vec{F} = \begin{pmatrix} -7,52\vec{i} & 2,74\vec{j} \end{pmatrix} \text{km}$$

$$\vec{E} - \vec{D} - 2\vec{F} = \begin{pmatrix} -16,79\vec{i} & -2,72\vec{j} \end{pmatrix} \text{km}$$

c)

$$\vec{D} \cdot \vec{E} = (2,27 \times -7 + 4,46 \times -1)$$

$$\vec{D} \cdot \vec{E} = -20,35$$

d)

$$\vec{E} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 3,76 & -1,37 \end{vmatrix} \vec{k} = (9,59 + 3,76) \vec{k} = 13,35 \vec{k}$$

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} 2,27\vec{i} & 4,46\vec{j} & 0\vec{k} \end{pmatrix}$$

$$-\vec{E} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} 0\vec{i} & 0\vec{j} & -13,35\vec{k} \end{pmatrix}$$

$$\vec{D} - (\vec{E} \times \vec{F}) = \begin{pmatrix} 2,27\vec{i} & 4,46\vec{j} & -13,35\vec{k} \end{pmatrix}$$

e)

$$\vec{E}_D = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{|\vec{D}|} \times \vec{\mu}_E$$

$$\vec{E}_D = \frac{(-7 \times 2,27 - 1 \times 4,46)}{5} \times \left(\frac{(2,27\vec{i} + 4,46\vec{j})}{5} \right) \quad \begin{matrix} |\vec{E}_D| = \sqrt{1,85^2 + 3,63^2} \\ |\vec{E}_D| = 4,07 \end{matrix}$$

$$\vec{E}_D = \begin{pmatrix} -1,85\vec{i} & -3,63\vec{j} \end{pmatrix}$$

f)

$$\vec{E} = (-7, -1) \text{km} \text{ y } \vec{F} = (3,76\vec{i} - 1,37\vec{j}) \text{km}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{(-7 \times 3,76 - 1 \times -1,37)}{(4)(\sqrt{7^2 + 1})} \right)$$

$$\theta = 86,25^\circ$$

g)

$$\text{Área} = \begin{vmatrix} 2,27 & 4,46 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} = (-2,27 + 31,22) = 28,95 \text{km}^2$$

11. Si la suma de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es $2\vec{i}-4\vec{j}$ y su diferencia es $6\vec{i}-10\vec{j}$ encontrar el ángulo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

SOLUCIÓN:

$$\begin{cases} A_x + B_x = 2 \dots\dots\dots(1) \\ A_x - B_x = 6 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

De (2)

$$A_x = 6 + B_x \dots\dots\dots(3)$$

(3) en (1)

$$6 + B_x + B_x = 2$$

$$2B_x = -4$$

$$B_x = -2$$

Reemplazando el valor de B_x en (1)

$$A_x - 2 = 2$$

$$A_x = 4$$

$$\vec{A} = (4\vec{i} - 7\vec{j})$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} \right)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{4 \times -2 - 7 \times 3}{(\sqrt{4^2 + 7^2})(\sqrt{2^2 + 3^2})} \right)$$

$$\theta = 176,05^\circ$$

$$\begin{cases} A_y + B_y = -4 \dots\dots\dots(1) \\ A_y - B_y = -10 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

De (2)

$$A_y = -10 + B_y \dots\dots\dots(3)$$

(3) en (1)

$$-10 + B_y + B_y = -4$$

$$2B_y = 6$$

$$B_y = 3$$

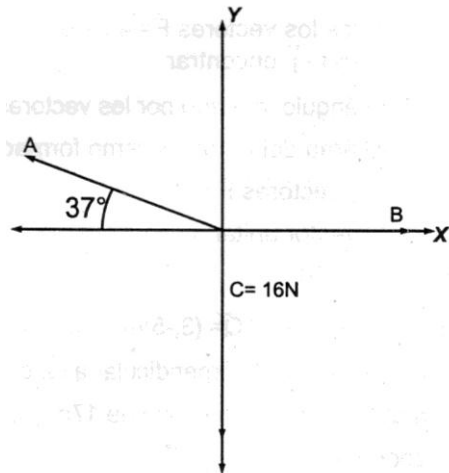
Reemplazando el valor de B_y en (1)

$$A_y + 3 = -4$$

$$A_y = -7$$

$$\vec{B} = (-2\vec{i} + 3\vec{j})$$

12. Determine las magnitudes de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, para $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$



$$\vec{C} = (0\vec{i} - 16\vec{j})\text{ N}$$

$$\text{Para que } Y=0 \quad A_y = -C_y \Rightarrow A_y = 16$$

Calculando A_x

$$\tan 37^\circ = \frac{16}{A_x}$$

$$A_x = \frac{16}{\tan 37^\circ}$$

$$A_x = 21,24 \text{ como esta en } X(-) \Rightarrow -21,24$$

$$\vec{A} = (-21,24\vec{i} + 16\vec{j})\text{ N}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{21,24^2 + 16^2}$$

$$|\vec{A}| = 26,59\text{ N}$$

$$\text{Para que } X=0 \quad B_x = -A_x \Rightarrow B_x = 21,24$$

$$\vec{B} = (21,24\vec{i} + 0\vec{j})\text{ N}$$

$$|\vec{B}| = 21,24\text{ N}$$

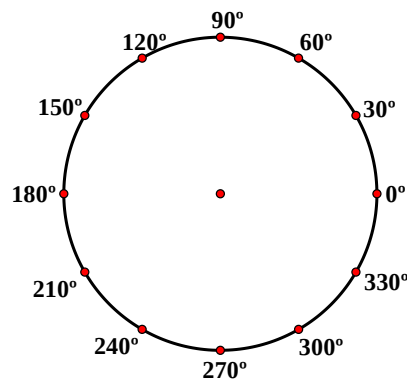
EJERCICIO N°5

1. En el reloj de una iglesia el minuterio mide 1,2 m y el horero 80 cm determinar la posición relativa del extremo del horero respecto al extremo del minuterio, en las siguientes horas:

- a) 10H10
- b) 12H35
- c) 5H40
- d) 8H20
- e) 9H10
- f) 6H50
- g) 2H40
- h) 11H05
- i) 4H00

SOLUCIÓN:

Basados en el siguiente grafico para determinar los vectores:

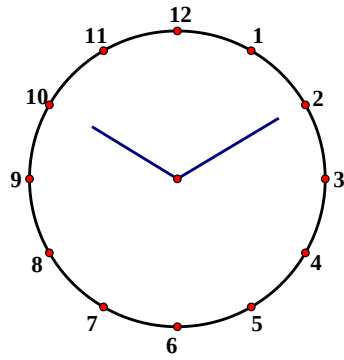


Datos:

$$L_{\min} = 1,2 \text{ m}$$

$$L_{\text{hor}} = 0,8 \text{ m}$$

a)



$$\vec{r}_{\min} = (1,2 \text{ m}; 30^\circ)$$

$$r_{X\min} = 1,2 \text{ m} \cos 30^\circ$$

$$r_{X\min} = 1,04 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\min} = (1,04 \vec{i} + 0,6 \vec{j}) \text{ m}$$

$$r_{Y\min} = 1,2 \text{ m} \sin 30^\circ$$

$$r_{Y\min} = 0,6 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}} = (0,8 \text{ m}; 150^\circ)$$

$$r_{X\text{hor}} = 0,8 \text{ m} \cos 150^\circ$$

$$r_{X\text{hor}} = 0,69 \text{ m}$$

$$r_{Y\text{hor}} = 0,8 \text{ m} \sin 150^\circ$$

$$r_{Y\text{hor}} = 0,4 \text{ m}$$

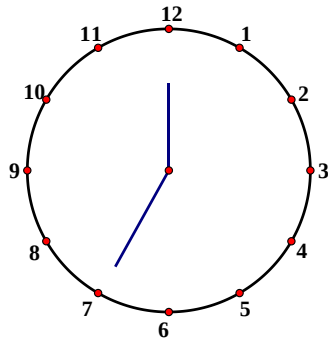
$$\vec{r}_{\text{hor}} = (-0,69 \vec{i} + 0,4 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = \vec{r}_{\text{hor}} - \vec{r}_{\min}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = (-0,69 \vec{i} + 0,4 \vec{j}) \text{ m} - (1,04 \vec{i} + 0,6 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = (-1,73 \vec{i} - 0,2 \vec{j}) \text{ m}$$

b)



$$\vec{r}_{\min} = (1,2 \text{ m}; 30^\circ)$$

$$r_{X\min} = 1,2 \text{ m} \cos 240^\circ$$

$$r_{X\min} = -0,6 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\min} = (-0,6 \vec{i} - 1,04 \vec{j}) \text{ m}$$

$$r_{Y\min} = 1,2 \text{ m} \sin 240^\circ$$

$$r_{Y\min} = -1,04 \text{ m}$$

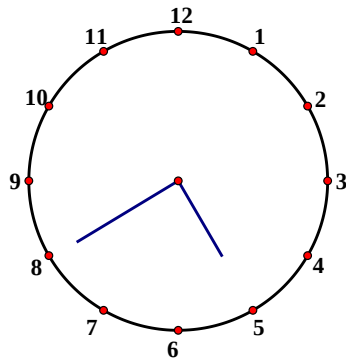
$$\vec{r}_{\text{hor}} = (0 \vec{i} + 0,8 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = \vec{r}_{\text{hor}} - \vec{r}_{\min}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = (0 \vec{i} + 0,8 \vec{j}) \text{ m} - (-0,6 \vec{i} - 1,04 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = (0,6 \vec{i} + 1,84 \vec{j}) \text{ m}$$

c)



$$\vec{r}_{\min} = (1,2 \text{ m}; 210^\circ)$$

$$r_{X\min} = 1,2 \text{ m} \cos 210^\circ$$

$$r_{X\min} = -1,04 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\min} = (-1,04 \vec{i} - 0,6 \vec{j}) \text{ m}$$

$$r_{Y\min} = 1,2 \text{ m} \sin 30^\circ$$

$$r_{Y\min} = -0,6 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}} = (0,8 \text{ m}; 300^\circ)$$

$$r_{X\text{hor}} = 0,8 \text{ m} \cos 300^\circ$$

$$r_{X\text{hor}} = -0,4 \text{ m}$$

$$r_{Y\text{hor}} = 0,8 \text{ m} \sin 300^\circ$$

$$r_{Y\text{hor}} = -0,69 \text{ m}$$

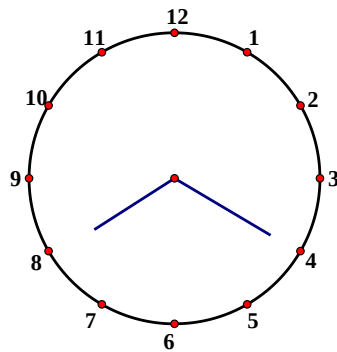
$$\vec{r}_{\text{hor}} = (-0,4 \vec{i} - 0,69 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = \vec{r}_{\text{hor}} - \vec{r}_{\min}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = (-1,04 \vec{i} - 0,6 \vec{j}) \text{ m} - (-0,4 \vec{i} - 0,69 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = (-0,64 \vec{i} - 0,09 \vec{j}) \text{ m}$$

d)



$$\vec{r}_{\min} = (1,2 \text{ m}; 30^\circ)$$

$$r_{X\min} = 1,2 \text{ m} \cos 330^\circ$$

$$r_{X\min} = 1,04 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\min} = (1,04 \vec{i} - 0,6 \vec{j}) \text{ m}$$

$$r_{Y\min} = 1,2 \text{ m} \sin 330^\circ$$

$$r_{Y\min} = -0,6 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}} = (0,8 \text{ m}; 210^\circ)$$

$$r_{X\text{hor}} = 0,8 \text{ m} \cos 210^\circ$$

$$r_{X\text{hor}} = -0,69 \text{ m}$$

$$r_{Y\text{hor}} = 0,8 \text{ m} \sin 210^\circ$$

$$r_{Y\text{hor}} = -0,4 \text{ m}$$

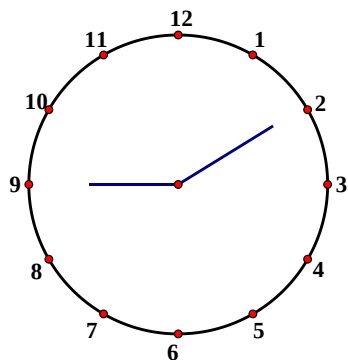
$$\vec{r}_{\text{hor}} = (-0,69 \vec{i} - 0,4 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = \vec{r}_{\text{hor}} - \vec{r}_{\min}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = (-0,69 \vec{i} - 0,4 \vec{j}) \text{ m} - (1,04 \vec{i} - 0,6 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = (-1,73 \vec{i} + 0,2 \vec{j}) \text{ m}$$

e)



$$\vec{r}_{\min} = (1,2 \text{ m}; 30^\circ)$$

$$r_{X\min} = 1,2 \text{ m} \cos 30^\circ$$

$$r_{X\min} = 1,04 \text{ m}$$

$$r_{Y\min} = 1,2 \text{ m} \sin 30^\circ$$

$$r_{Y\min} = 0,6 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\min} = (1,04 \vec{i} + 0,6 \vec{j}) \text{ m}$$

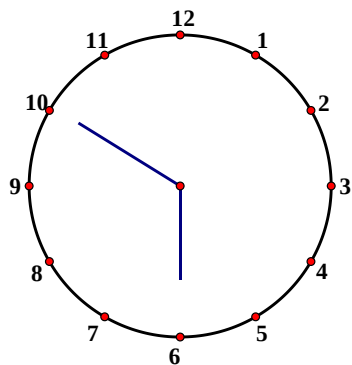
$$\vec{r}_{\text{hor}} = (-0,8 \vec{i} + 0 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = \vec{r}_{\text{hor}} - \vec{r}_{\min}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = (-0,8 \vec{i} + 0 \vec{j}) \text{ m} - (1,04 \vec{i} + 0,6 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = (-1,84 \vec{i} - 0,6 \vec{j}) \text{ m}$$

f)



$$\vec{r}_{\min} = (1,2 \text{ m}; 150^\circ)$$

$$r_{X\min} = 1,2 \text{ m} \cos 150^\circ$$

$$r_{X\min} = -1,04 \text{ m}$$

$$r_{Y\min} = 1,2 \text{ m} \sin 30^\circ$$

$$r_{Y\min} = -0,6 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\min} = (-1,04 \vec{i} - 0,6 \vec{j}) \text{ m}$$

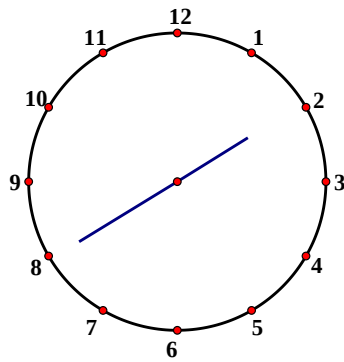
$$\vec{r}_{\text{hor}} = (0 \vec{i} - 0,8 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = \vec{r}_{\text{hor}} - \vec{r}_{\min}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = (0 \vec{i} - 0,8 \vec{j}) \text{ m} - (-1,04 \vec{i} - 0,6 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = (1,04 \vec{i} - 0,2 \vec{j}) \text{ m}$$

g)



$$\vec{r}_{\min} = (1,2 \text{ m}; 210^\circ)$$

$$r_{X\min} = 1,2 \text{ m} \cos 210^\circ$$

$$r_{X\min} = -1,04 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\min} = (-1,04 \vec{i} - 0,6 \vec{j}) \text{ m}$$

$$r_{Y\min} = 1,2 \text{ m} \sin 210^\circ$$

$$r_{Y\min} = -0,6 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}} = (0,8 \text{ m}; 30^\circ)$$

$$r_{X\text{hor}} = 0,8 \text{ m} \cos 30^\circ$$

$$r_{X\text{hor}} = 0,69 \text{ m}$$

$$r_{Y\text{hor}} = 0,8 \text{ m} \sin 30^\circ$$

$$r_{Y\text{hor}} = 0,4 \text{ m}$$

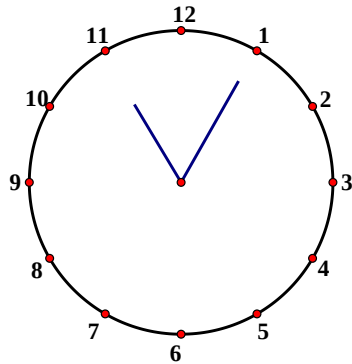
$$\vec{r}_{\text{hor}} = (0,69 \vec{i} + 0,4 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = \vec{r}_{\text{hor}} - \vec{r}_{\min}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = (0,69 \vec{i} + 0,4 \vec{j}) \text{ m} - (-1,04 \vec{i} - 0,6 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = (1,73 \vec{i} + \vec{j}) \text{ m}$$

h)



$$\vec{r}_{\min} = (1,2 \text{ m}; 60^\circ)$$

$$r_{X\min} = 1,2 \text{ m} \cos 60^\circ$$

$$r_{X\min} = 0,6 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\min} = (0,6 \vec{i} + 1,04 \vec{j}) \text{ m}$$

$$r_{Y\min} = 1,2 \text{ m} \sin 30^\circ$$

$$r_{Y\min} = 1,04 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}} = (0,8 \text{ m}; 120^\circ)$$

$$r_{X\text{hor}} = 0,8 \text{ m} \cos 120^\circ$$

$$r_{X\text{hor}} = -0,4 \text{ m}$$

$$r_{Y\text{hor}} = 0,8 \text{ m} \sin 120^\circ$$

$$r_{Y\text{hor}} = 0,69 \text{ m}$$

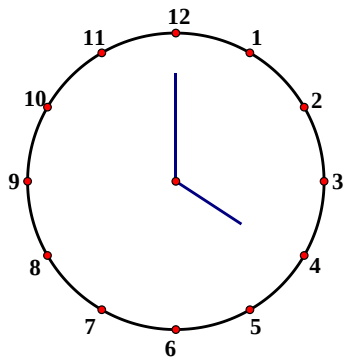
$$\vec{r}_{\text{hor}} = (-0,4 \vec{i} + 0,69 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = \vec{r}_{\text{hor}} - \vec{r}_{\min}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = (-0,4 \vec{i} + 0,69 \vec{j}) \text{ m} - (0,6 \vec{i} + 1,04 \vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = (-\vec{i} - 0,35 \vec{j}) \text{ m}$$

i)



$$\vec{r}_{\min} = (0\vec{i} + 1,2\vec{j})\text{m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}} = (0,8\text{m}; 330^\circ)$$

$$r_{x\text{hor}} = 0,8\text{m}\cos 150^\circ$$

$$r_{x\text{hor}} = 0,69\text{m}$$

$$r_{y\text{hor}} = 0,8\text{m}\sin 330^\circ$$

$$r_{y\text{hor}} = -0,4\text{m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}} = (0,69\vec{i} - 0,4\vec{j})\text{m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = \vec{r}_{\text{hor}} - \vec{r}_{\min}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = (0,69\vec{i} - 0,4\vec{j})\text{m} - (0\vec{i} + 1,2\vec{j})\text{m}$$

$$\vec{r}_{\text{hor}/\min} = (0,69\vec{i} - 1,6\vec{j})\text{m}$$

2. Una persona vive a 2km en dirección NE del centro de la ciudad, si para ir a la tienda mas cercana camina 200m al este y luego 100m al sur, determinar:

- La posición de la tienda respecto a la ciudad
- La posición de la tienda respecto a la casa de la persona
- La distancia en línea recta de la casa a la tienda

SOLUCIÓN:

Datos:

Ciudad=origen

$$\vec{r}_{\text{casa}} = (2\text{km}; \text{NE}) \Rightarrow (1,41\vec{i} + 1,41\vec{j})\text{km}$$

$$\vec{r}_{\text{tienda/casa}} = (200\vec{i} - 100\vec{j})\text{m} \Rightarrow \vec{r}_{\text{tienda/casa}} = (0,2\vec{i} - 0,1\vec{j})\text{km}$$

a)

$$\vec{r}_{\text{tienda/casa}} = \vec{r}_{\text{tienda}} - \vec{r}_{\text{casa}}$$

$$\vec{r}_{\text{tienda}} = \vec{r}_{\text{tienda/casa}} + \vec{r}_{\text{casa}}$$

$$\vec{r}_{\text{tienda}} = (1,41\vec{i} + 1,41\vec{j})\text{km} + (0,2\vec{i} - 0,1\vec{j})\text{km}$$

$$\vec{r}_{\text{tienda}} = (1,61\vec{i} + 1,31\vec{j})\text{km}$$

b)

$$\overrightarrow{r_{\text{tienda/casa}}} = (200\mathbf{i} - 100\mathbf{j})\text{m} \Rightarrow \overrightarrow{r_{\text{tienda/casa}}} = (0,2\mathbf{i} - 0,1\mathbf{j})\text{km}$$

c)

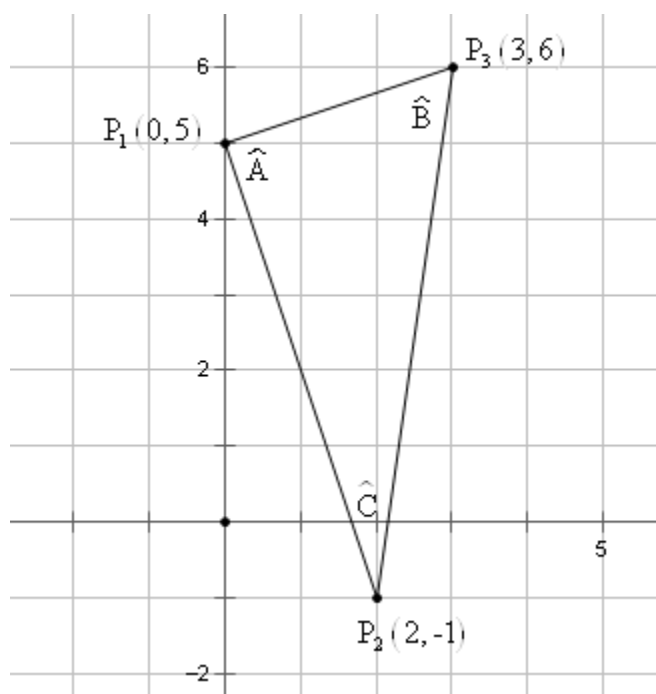
$$|\overrightarrow{r_{\text{tienda/casa}}}| = \sqrt{200^2 + 100^2}$$

$$|\overrightarrow{r_{\text{tienda/casa}}}| = 223,60\text{m} \Rightarrow 0,223\text{km}$$

3. Los vértices de un triángulo son los puntos $P_1(0,5)$, $P_2(2,-1)$ y $P_3(3,6)$, determinar:

- a) El valor de los ángulos internos del triángulo
- b) El tipo de triángulo en función de sus lados

SOLUCIÓN:



a)

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (2\vec{i} - \vec{j}) - (0\vec{i} + 5\vec{j})$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (2\vec{i} - 6\vec{j})$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = (3\vec{i} + 6\vec{j}) - (0\vec{i} + 5\vec{j})$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = (3\vec{i} + \vec{j})$$

$$\overrightarrow{P_2P_3} = (3\vec{i} + 6\vec{j}) - (2\vec{i} - \vec{j})$$

$$\overrightarrow{P_2P_3} = (\vec{i} + 7\vec{j})$$

$$A = \cos^{-1} \left(\frac{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_3}}{|\overrightarrow{P_1P_2}| |\overrightarrow{P_1P_3}|} \right)$$

$$B = \cos^{-1} \left(\frac{\overrightarrow{P_1P_3} \cdot \overrightarrow{P_2P_3}}{|\overrightarrow{P_1P_3}| |\overrightarrow{P_2P_3}|} \right)$$

$$A = \cos^{-1} \left(\frac{2 \times 3 - 6 \times 1}{(\sqrt{2^2 + 6^2})(\sqrt{3^2 + 1})} \right)$$

$$B = \cos^{-1} \left(\frac{3 \times 1 + 1 \times 7}{(\sqrt{3^2 + 1})(\sqrt{1 + 7^2})} \right)$$

$$A = 90^\circ$$

$$B = 63,43^\circ$$

$$63,43^\circ + 90^\circ + C = 180^\circ$$

$$C = 180^\circ - 90^\circ - 63,43^\circ$$

$$C = 26,57^\circ$$

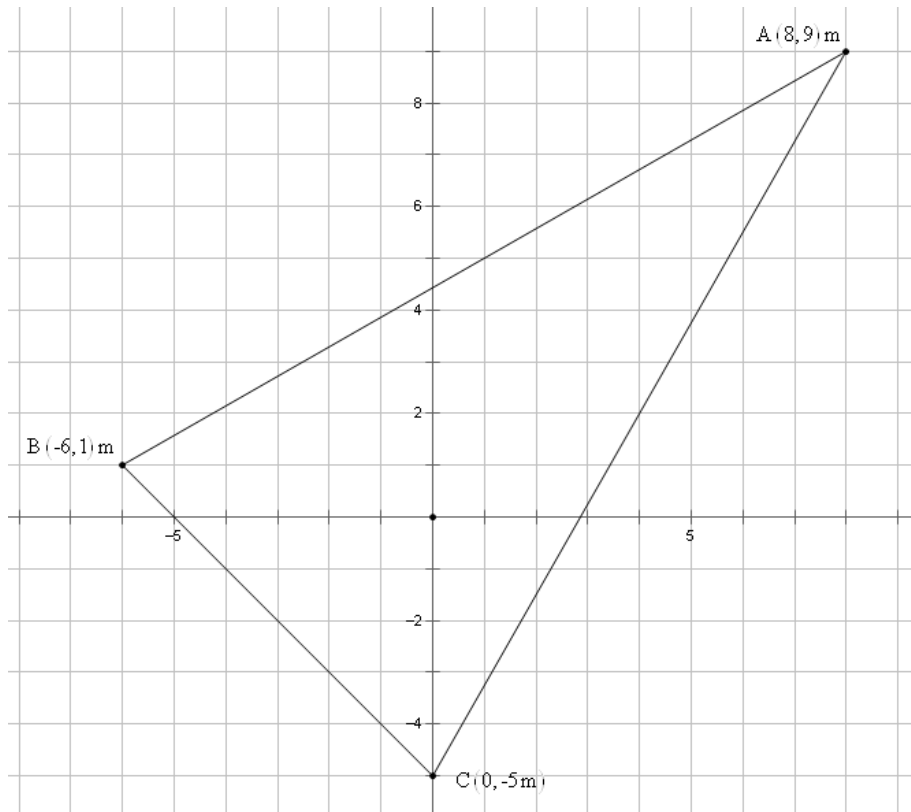
b)

Triángulo rectángulo

4. Los vértices de un triángulo son los puntos $A(8,9)m$, $B(-6,1)m$, $C(0,-5m)$, determinar:

- a) El valor de los ángulos internos del triángulo
- b) El área del triángulo ABC

SOLUCIÓN:



a)

$$\overrightarrow{AB} = (-6\vec{i} + \vec{j})\text{m} - (8\vec{i} + 9\vec{j})\text{m}$$

$$\overrightarrow{AC} = (0\vec{i} - 5\vec{j})\text{m} - (8\vec{i} + 9\vec{j})\text{m}$$

$$\overrightarrow{AB} = (-14\vec{i} - 8\vec{j})\text{m}$$

$$\overrightarrow{AC} = (-8\vec{i} - 14\vec{j})\text{m}$$

$$\overrightarrow{BC} = (0\vec{i} - 5\vec{j})\text{m} - (-6\vec{i} + \vec{j})\text{m}$$

$$\overrightarrow{BC} = (6\vec{i} - 6\vec{j})\text{m}$$

$$A = \cos^{-1} \left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} \right)$$

$$C = \cos^{-1} \left(\frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{BC}|} \right)$$

$$A = \cos^{-1} \left(\frac{-14 \times -8 - 8 \times 14}{(\sqrt{14^2 + 8^2})(\sqrt{8^2 + 14^2})} \right)$$

$$C = \cos^{-1} \left(\frac{-8 \times 6 - 14 \times -6}{(\sqrt{8^2 + 14^2})(\sqrt{6^2 + 6^2})} \right)$$

$$A = 30,51^\circ$$

$$C = 74,74^\circ$$

$$B = 180^\circ - 30,51^\circ - 74,74^\circ$$

$$B = 74,75^\circ$$

b)

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

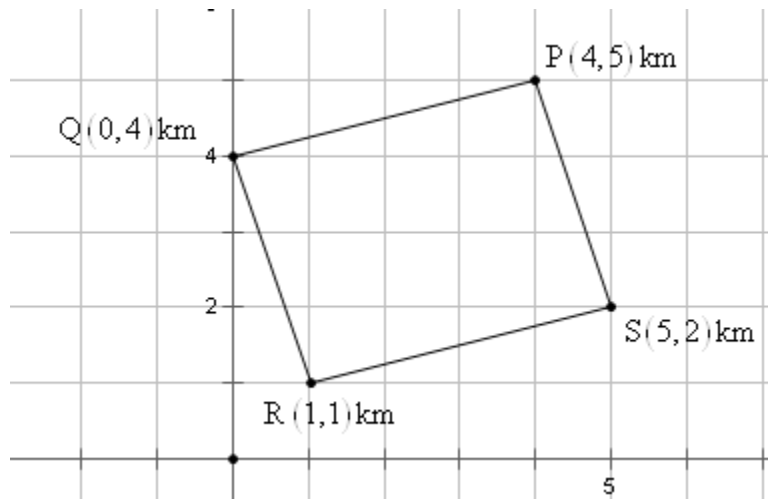
$$\text{Área} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -14 & -8 \\ -8 & -14 \end{vmatrix} = |196 - 64| = 132 \text{ m}^2$$

5. Una ciudad está delimitada por las rectas que unen los vértices: P(4,5)km,

Q(0,4)km, R(1,1)km, S(5,2)km, determinar:

- La forma geométrica de la ciudad
- El área de la ciudad
- La posición relativa del punto R respecto del punto P
- La posición relativa del punto S respecto del punto R

SOLUCIÓN:



a)

Paralelogramo

b)

$$\overrightarrow{RQ} = (0\vec{i} + 4\vec{j})\text{km} - (\vec{i} + \vec{j})\text{km}$$

$$\overrightarrow{RS} = (5\vec{i} + 2\vec{j})\text{km} - (\vec{i} + \vec{j})\text{km}$$

$$\overrightarrow{RQ} = (-\vec{i} + 3\vec{j})\text{km}$$

$$\overrightarrow{RS} = (4\vec{i} + \vec{j})\text{km}$$

$$\text{Área} = |\overrightarrow{RQ} \times \overrightarrow{RS}|$$

$$\text{Área} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = |-1 - 12| = 13 \text{ km}^2$$

c)

$$\overrightarrow{r_{R/P}} = (\vec{i} + \vec{j}) \text{ km} - (4\vec{i} + 5\vec{j}) \text{ km}$$

$$\overrightarrow{r_{R/P}} = (-3\vec{i} - 4\vec{j}) \text{ km}$$

d)

$$\overrightarrow{r_{S/R}} = (5\vec{i} + 2\vec{j}) \text{ km} - (\vec{i} + \vec{j}) \text{ km}$$

$$\overrightarrow{r_{S/R}} = (4\vec{i} + \vec{j}) \text{ km}$$

6. tiene las ciudades P, Q y R; determine la posición relativa de la ciudad P respecto a R para los siguientes casos:

a) $\overrightarrow{r_{P/Q}}$ (50 km; S60° E) y $\overrightarrow{r_{R/Q}}$ (70 km; NO)

b) $\overrightarrow{r_{P/Q}}$ (80 km; SO) y $\overrightarrow{r_{R/Q}}$ (25 km; N70° O)

c) $\overrightarrow{r_{P/Q}}$ (65 km; N15° O) y $\overrightarrow{r_{R/Q}}$ (90 km; S30° O)

d) $\overrightarrow{r_{P/Q}}$ (40 km; N75° E) y $\overrightarrow{r_{R/Q}}$ (100 km; S25° E)

SOLUCIÓN:

$$\overrightarrow{r_{P/Q}} = \overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_Q}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{r_Q} = \overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_{P/Q}} \dots \dots \dots (1)$$

$$\overrightarrow{r_{R/Q}} = \overrightarrow{r_R} - \overrightarrow{r_Q}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{r_Q} = \overrightarrow{r_R} - \overrightarrow{r_{R/Q}} \dots \dots \dots (2)$$

$$\overrightarrow{r_{P/R}} = \overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_R} \dots \dots \dots (3)$$

Igualando (1) y (2)

$$\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_{P/Q}} = \overrightarrow{r_R} - \overrightarrow{r_{R/Q}}$$

$$\overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_R} = \overrightarrow{r_{P/Q}} - \overrightarrow{r_{R/Q}} \dots \dots \dots (4)$$

(3) en (4)

$$\overrightarrow{r_{P/R}} = \overrightarrow{r_{P/Q}} - \overrightarrow{r_{R/Q}}$$

a)

$$\overrightarrow{r_{P/Q}} (50 \text{ km; S60° E})$$

$$\theta = 270^\circ + 60^\circ$$

$$\theta = 330^\circ$$

$$r_{P/Q}x = |\vec{r}_{P/Q}| \cos \theta$$

$$r_{P/Q}x = 50 \text{ km} \cos 330^\circ$$

$$r_{P/Q}x = 43,30 \text{ km}$$

$$\vec{r}_{P/Q} = (43,30 \vec{i} - 25 \vec{j}) \text{ km}$$

$$r_{P/Q}y = |\vec{r}_{P/Q}| \sin \theta$$

$$r_{P/Q}y = 50 \text{ km} \sin 330^\circ$$

$$r_{P/Q}y = -25 \text{ km}$$

$$\vec{r}_{R/Q} (70 \text{ km}; \text{NO})$$

$$\theta = 90^\circ + 45^\circ$$

$$\theta = 135^\circ$$

$$r_{R/Q}x = |\vec{r}_{R/Q}| \cos \theta$$

$$r_{R/Q}x = 70 \text{ km} \cos 135^\circ$$

$$r_{R/Q}x = -49,50 \text{ km}$$

$$\vec{r}_{R/Q} = (-49,50 \vec{i} + 49,50 \vec{j}) \text{ km}$$

$$r_{R/Q}y = |\vec{r}_{R/Q}| \sin \theta$$

$$r_{R/Q}y = 70 \text{ km} \sin 135^\circ$$

$$r_{R/Q}y = 49,50 \text{ km}$$

$$\vec{r}_{P/R} = \vec{r}_{P/Q} - \vec{r}_{R/Q}$$

$$\vec{r}_{P/R} = (43,30 \vec{i} - 25 \vec{j}) \text{ km} - (-49,50 \vec{i} + 49,50 \vec{j}) \text{ km}$$

$$\vec{r}_{P/R} = (92,50 \vec{i} - 74,50 \vec{j}) \text{ km}$$

b)

$$\vec{r}_{P/Q} (80 \text{ km}; \text{SO})$$

$$\theta = 270^\circ - 45^\circ$$

$$\theta = 225^\circ$$

$$r_{P/Q}x = |\vec{r}_{P/Q}| \cos \theta$$

$$r_{P/Q}x = 80 \text{ km} \cos 225^\circ$$

$$r_{P/Q}x = -56,57 \text{ km}$$

$$\vec{r}_{P/Q} = (-56,57 \vec{i} - 56,57 \vec{j}) \text{ km}$$

$$r_{P/Q}y = |\vec{r}_{P/Q}| \sin \theta$$

$$r_{P/Q}y = 80 \text{ km} \sin 225^\circ$$

$$r_{P/Q}y = -56,57 \text{ km}$$

$$\vec{r}_{R/Q} (25 \text{ km}; \text{N } 70^\circ \text{O})$$

$$\theta = 90^\circ + 70^\circ$$

$$\theta = 160^\circ$$

$$\begin{aligned}
r_{R/Q}x &= |\vec{r}_{R/Q}| \cos \theta & r_{R/Q}y &= |\vec{r}_{R/Q}| \sin \theta \\
r_{R/Q}x &= 25 \text{ km} \cos 160^\circ & r_{R/Q}y &= 25 \text{ km} \sin 160^\circ \\
r_{R/Q}x &= -23,49 \text{ km} & r_{R/Q}y &= 8,55 \text{ km} \\
\vec{r}_{R/Q} &= (-23,49 \vec{i} + 8,55 \vec{j}) \text{ km}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{P/R} &= \vec{r}_{P/Q} - \vec{r}_{R/Q} \\
\vec{r}_{P/R} &= (-56,57 \vec{i} - 56,57 \vec{j}) \text{ km} - (-23,49 \vec{i} + 8,55 \vec{j}) \text{ km} \\
\vec{r}_{P/R} &= (-33,08 \vec{i} - 48,02 \vec{j}) \text{ km}
\end{aligned}$$

c)

$$\vec{r}_{P/Q} (65 \text{ km}; N15^\circ O)$$

$$\theta = 90^\circ + 15^\circ$$

$$\theta = 105^\circ$$

$$\begin{aligned}
r_{P/Q}x &= |\vec{r}_{P/Q}| \cos \theta & r_{P/Q}y &= |\vec{r}_{P/Q}| \sin \theta \\
r_{P/Q}x &= 65 \text{ km} \cos 105^\circ & r_{P/Q}y &= 65 \text{ km} \sin 105^\circ \\
r_{P/Q}x &= -16,82 \text{ km} & r_{P/Q}y &= 62,79 \text{ km} \\
\vec{r}_{P/Q} &= (-16,82 \vec{i} + 62,79 \vec{j}) \text{ km}
\end{aligned}$$

$$\vec{r}_{R/Q} (90 \text{ km}; S30^\circ O)$$

$$\theta = 270^\circ - 30^\circ$$

$$\theta = 240^\circ$$

$$\begin{aligned}
r_{R/Q}x &= |\vec{r}_{R/Q}| \cos \theta & r_{R/Q}y &= |\vec{r}_{R/Q}| \sin \theta \\
r_{R/Q}x &= 90 \text{ km} \cos 240^\circ & r_{R/Q}y &= 90 \text{ km} \sin 240^\circ \\
r_{R/Q}x &= -45 \text{ km} & r_{R/Q}y &= -77,94 \text{ km} \\
\vec{r}_{R/Q} &= (-45 \vec{i} - 77,94 \vec{j}) \text{ km}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{P/R} &= \vec{r}_{P/Q} - \vec{r}_{R/Q} \\
\vec{r}_{P/R} &= (-16,82 \vec{i} + 62,79 \vec{j}) \text{ km} - (-45 \vec{i} - 77,94 \vec{j}) \text{ km} \\
\vec{r}_{P/R} &= (28,18 \vec{i} + 140,73 \vec{j}) \text{ km}
\end{aligned}$$

d)

$$\vec{r}_{P/Q} (40 \text{ km; N } 75^\circ \text{ E})$$

$$\theta = 90^\circ - 75^\circ$$

$$\theta = 15^\circ$$

$$r_{P/Q} x = |\vec{r}_{P/Q}| \cos \theta$$

$$r_{P/Q} y = |\vec{r}_{P/Q}| \sin \theta$$

$$r_{P/Q} x = 40 \text{ km} \cos 15^\circ$$

$$r_{P/Q} y = 40 \text{ km} \sin 15^\circ$$

$$r_{P/Q} x = 38,64 \text{ km}$$

$$r_{P/Q} y = 16,82 \text{ km}$$

$$\vec{r}_{P/Q} = (38,64 \vec{i} + 16,82 \vec{j}) \text{ km}$$

$$\vec{r}_{R/Q} (100 \text{ km; S } 25^\circ \text{ E})$$

$$\theta = 270^\circ + 25^\circ$$

$$\theta = 295^\circ$$

$$r_{R/Q} x = |\vec{r}_{R/Q}| \cos \theta$$

$$r_{R/Q} y = |\vec{r}_{R/Q}| \sin \theta$$

$$r_{R/Q} x = 100 \text{ km} \cos 295^\circ$$

$$r_{R/Q} y = 100 \text{ km} \sin 295^\circ$$

$$r_{R/Q} x = 42,26 \text{ km}$$

$$r_{R/Q} y = -90,63 \text{ km}$$

$$\vec{r}_{R/Q} = (-45 \vec{i} - 77,94 \vec{j}) \text{ km}$$

$$\vec{r}_{P/R} = \vec{r}_{P/Q} - \vec{r}_{R/Q}$$

$$\vec{r}_{P/R} = (38,64 \vec{i} + 16,82 \vec{j}) \text{ km} - (-45 \vec{i} - 77,94 \vec{j}) \text{ km}$$

$$\vec{r}_{P/R} = (83,64 \vec{i} + 94,76 \vec{j}) \text{ km}$$

7. Para los casos del ejercicio anterior. Si se construye una carretera directa en línea recta desde la ciudad P hacia ciudad R, determine el ahorro de combustible para un auto que consume 1 galón de gasolina por cada 45 km, si se compara el nuevo camino con la ruta que une las ciudades P hacia Q y Q hacia R en línea recta.

8. Dados los puntos L(8, -6)m y J(-4, 3)m, determinar:

a) Los vectores posición de $\vec{L}$ y $\vec{J}$ respecto al origen

b) La posición relativa de $\vec{L}$ con respecto a $\vec{J}$

c) La distancia entre los puntos $\vec{L}$ y $\vec{J}$

SOLUCIÓN:

a)

$$\vec{r}_L = (8\vec{i} - 6\vec{j})\text{m}$$

$$\vec{r}_J = (-4\vec{i} + 3\vec{j})\text{m}$$

b)

$$\vec{r}_{L/J} = \vec{r}_L - \vec{r}_J$$

$$\vec{r}_{L/J} = (8\vec{i} - 6\vec{j})\text{m} - (-4\vec{i} + 3\vec{j})\text{m}$$

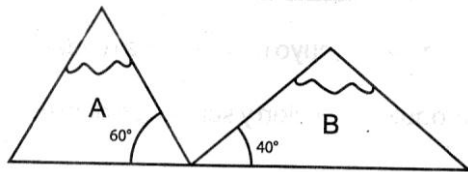
$$\vec{r}_{L/J} = (12\vec{i} - 9\vec{j})\text{m}$$

c)

$$|\vec{r}_{L/J}| = \sqrt{12^2 + 9^2}$$

$$|\vec{r}_{L/J}| = 15\text{m}$$

9. La cumbre de la montaña A está a 3km del suelo y la cumbre de la montaña B a 2km del suelo. Si las montañas se unen como indica el siguiente grafico:



Determinar:

- a) La posición relativa de la cumbre de la montaña B respecto a la cumbre de la montaña A
- b) La longitud del cable para instalar un teleférico de la cumbre de la montaña A a la cumbre de la montaña B

SOLUCIÓN:

$$\tan 60^\circ = \frac{r_A x}{r_A y}$$

$$r_A y = \frac{r_A x}{\tan 60^\circ}$$

$$r_A y = \frac{3 \text{ km}}{\tan 60^\circ}$$

$$r_A y = 1,73 \text{ km}$$

$$\tan 40^\circ = \frac{r_B x}{r_B y}$$

$$r_B y = \frac{r_B x}{\tan 40^\circ}$$

$$r_B y = \frac{2 \text{ km}}{\tan 40^\circ}$$

$$r_B y = 2,38 \text{ km}$$

$$\vec{r}_A = (-1,73\vec{i} + 3\vec{j}) \text{ km}$$

$$\vec{r}_B = (2,38\vec{i} + 2\vec{j}) \text{ km}$$

a)

$$\vec{r}_{B/A} = (2,38\vec{i} + 2\vec{j}) \text{ km} - (-1,73\vec{i} + 3\vec{j}) \text{ km}$$

$$\vec{r}_{B/A} = (4,11\vec{i} - \vec{j}) \text{ km}$$

b)

$$|\vec{r}_{B/A}| = \sqrt{4,11^2 + 1}$$

$$|\vec{r}_{B/A}| = 4,23 \text{ km}$$

Considerando ida y vuelta por cables independientes

$$4,23 \text{ km} \times 2 = 8,46$$

10. Las coordenadas de los puntos inicial y final de un vector $\vec{E}$ son $(5, -2) \text{ m}$ y $(-4, 7) \text{ m}$ respectivamente, determinar:

- Las componentes rectangulares del vector $\vec{E}$
- La magnitud del vector $\vec{E}$
- El vector unitario del vector $\vec{E}$

SOLUCIÓN:

a)

$$\vec{E} = (-4, 7)\text{m} - (5, -2)\text{m}$$

$$\vec{E} = (-9, 9)\text{m}$$

b)

$$|\vec{E}| = \sqrt{9^2 + 9^2}$$

$$|\vec{E}| = 12,73\text{m}$$

c)

$$\vec{\mu}_E = \frac{\vec{E}}{|\vec{E}|}$$

$$\vec{\mu}_E = \frac{(-9\vec{i} + 9\vec{j})\text{m}}{12,73\text{m}}$$

$$\vec{\mu}_E = (-0,706\vec{i} + 0,706\vec{j})\text{m}$$

11. Un avión de aeromodelismo está a (4km, SO) de la torre de control. En ese momento, su dueño desea impactar en un blanco que esta ubicado en el punto (6, -4)km, determinar:

- a) La posición del avión respecto al blanco
- b) La dirección que debe tomar el avión para lograr su propósito
- c) La distancia del avión al blanco

SOLUCIÓN:

a)

(4km, SO)

$$A_x = |\vec{A}| \cos \theta$$

$$A_x = 4\text{km} \cos 225^\circ$$

$$A_x = -2,83\text{km}$$

$$A_y = |\vec{A}| \sin \theta$$

$$A_y = 4\text{km} \sin 225^\circ$$

$$A_y = -2,83\text{km}$$

$$\vec{A} = (-2,83\vec{i} - 2,83\vec{j})\text{km}$$

$$\vec{r}_{A/B} = (-2,83\vec{i} - 2,83\vec{j})\text{km} - (6\vec{i} - 4\vec{j})\text{km}$$

$$\vec{r}_{A/B} = (-8,83\vec{i} + 1,17\vec{j})\text{km}$$

b)

$$\phi = \tan\left(\frac{8,83}{1,17}\right) \quad \text{S}82,45^\circ \text{E}$$

$$\phi = 82,45^\circ$$

c)

$$|\vec{r}_{A/B}| = \sqrt{8,83^2 + 1,17^2}$$

$$|\vec{r}_{A/B}| = 8,91\text{km}$$

12. En un aeropuerto, un avión B se halla parqueado en la posición (200m, N28° E) respecto a la torre de control. En ese instante otro avión A se encuentra en la posición (200m, SO) respecto a la misma torre de control, determinar:

- a) La posición relativa de B respecto de A
- b) La distancia que existe entre los dos aviones

SOLUCIÓN:

a)

(200m, N28° E)

$$B_x = |\vec{B}| \cos \theta$$

$$B_x = 200\text{m} \cos 62^\circ$$

$$B_x = 93,89\text{m}$$

$$B_y = |\vec{B}| \sin \theta$$

$$B_y = 200\text{m} \sin 62^\circ$$

$$B_y = 176,59\text{m}$$

$$\vec{B} = (93,89\vec{i} + 176,59\vec{j})\text{m}$$

(200m, SO)

$$\begin{aligned}
 A_x &= |\vec{A}| \cos \theta & A_y &= |\vec{A}| \sin \theta \\
 A_x &= 200 \text{ m} \cos 225^\circ & A_y &= 200 \text{ m} \sin 225^\circ & \vec{A} &= (-141,42 \vec{i} - 141,42 \vec{j}) \text{ m} \\
 A_x &= -141,42 & A_y &= -141,42
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_{B/A} &= (93,89 \vec{i} + 176,59 \vec{j}) \text{ m} - (-141,42 \vec{i} - 141,42 \vec{j}) \text{ m} \\
 \vec{r}_{B/A} &= (235,31 \vec{i} + 318,01 \vec{j}) \text{ m}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 |\vec{r}_{B/A}| &= \sqrt{235,31^2 + 318,01^2} \\
 |\vec{r}_{B/A}| &= 395,60 \text{ m}
 \end{aligned}$$

13. Un bote tiene 2 motores fuera de borda. El primer motor impulsa el bote en dirección *NO* con una velocidad de 20m/s, el segundo motor impulsa al bote en dirección N25°E con una velocidad de 15m/s, determinar:

- La velocidad resultante del bote en magnitud y dirección
- El vector unitario del vector velocidad resultante
- Los ángulos directores del vector velocidad resultante

SOLUCIÓN:

a)

$$\vec{A} = (20 \text{ m/s}; \text{NO})$$

$$\begin{aligned}
 A_x &= |\vec{A}| \cos \theta & A_y &= |\vec{A}| \sin \theta \\
 A_x &= 20 \text{ m/s} \cos 135^\circ & A_y &= 20 \text{ m/s} \sin 135^\circ & \vec{A} &= (-14,14 \vec{i} + 14,14 \vec{j}) \text{ m/s} \\
 A_x &= -14,14 \text{ m/s} & A_y &= 14,14 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

$$\vec{B} = (15 \text{ m/s}; \text{N}25^\circ\text{E})$$

$$\begin{aligned}
 B_x &= |\vec{B}| \cos \theta & B_y &= |\vec{B}| \sin \theta \\
 B_x &= 15 \text{ m/s} \cos 65^\circ & B_y &= 15 \text{ m/s} \sin 65^\circ & \vec{B} &= (6,34 \vec{i} + 13,59 \vec{j}) \text{ m/s} \\
 B_x &= 6,34 \text{ m/s} & B_y &= 13,59 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{V} &= (-14,14 \vec{i} + 14,14 \vec{j}) \text{ m/s} + (6,34 \vec{i} + 13,59 \vec{j}) \text{ m/s} \\
 \vec{V} &= (-7,8 \vec{i} + 27,73 \vec{j}) \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{V}| &= \sqrt{7,8^2 + 27,73^2} & \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{7,8}{27,73} \right) & \vec{V} &= (28,81 \text{ m/s}; \text{N}15,71^\circ \text{O}) \\
 |\vec{V}| &= 28,81 \text{ m/s} & \phi &= 15,71^\circ
 \end{aligned}$$

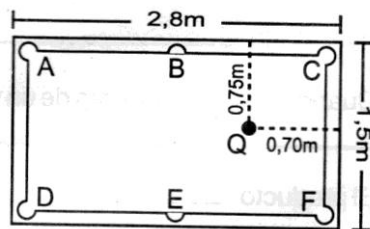
b)

$$\begin{aligned}
 \vec{\mu}_V &= \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} \\
 \vec{\mu}_V &= \frac{(-7,8 \vec{i} + 27,73 \vec{j}) \text{ m/s}}{28,81 \text{ m/s}} \\
 \vec{\mu}_V &= (-0,27 \vec{i} + 0,96 \vec{j}) \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 90^\circ + 15,71^\circ & \beta &= 15,71^\circ \\
 \alpha &= 105,71^\circ
 \end{aligned}$$

14. Una mesa de billar tiene las siguientes dimensiones:



- La posición relativa de la buchaca F respecto a la buchaca A
- La posición relativa de la buchaca C respecto a la buchaca E
- El ángulo formado por los vectores $\vec{EA}$ y $\vec{EC}$

- d) La posición relativa de una bola ubicada en el punto Q respecto a la buchaca D
 e) La proyección del vector $\overrightarrow{AE}$ sobre $\overrightarrow{AQ}$

SOLUCIÓN:

Considerando A como origen:

a)

$$\overrightarrow{r_{F/A}} = (2,8\vec{i} - 1,5\vec{j})\text{m}$$

b)

$$\overrightarrow{r_C} = (2,8\vec{i} + 0\vec{j})\text{m} \quad \overrightarrow{r_E} = (1,4\vec{i} - 1,5\vec{j})\text{m}$$

$$\overrightarrow{r_{C/E}} = \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_E}$$

$$\overrightarrow{r_{C/E}} = (2,8\vec{i} + 0\vec{j})\text{m} - (1,4\vec{i} - 1,5\vec{j})\text{m}$$

$$\overrightarrow{r_{C/E}} = (1,4\vec{i} + 1,5\vec{j})\text{m}$$

c)

$$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{E}$$

$$\overrightarrow{EA} = (-1,4\vec{i} + 1,5\vec{j})\text{m}$$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{E}$$

$$\overrightarrow{EC} = (1,4\vec{i} + 1,5\vec{j})\text{m}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{-1,4 \times 1,4 + 1,5 \times 1,5}{\left(\sqrt{1,4^2 + 1,5^2}\right)\left(\sqrt{1,4^2 + 1,5^2}\right)} \right)$$

$$\theta = 86,05^\circ$$

d)

$$\overrightarrow{Q} = (2,1\vec{i} - 0,75\vec{j})\text{m} \quad \overrightarrow{D} = (0\vec{i} - 1,5\vec{j})\text{m}$$

$$\overrightarrow{r_{Q/D}} = (2,1\vec{i} - 0,75\vec{j})\text{m} - (0\vec{i} - 1,5\vec{j})\text{m}$$

$$\overrightarrow{r_{Q/D}} = (2,1\vec{i} + 0,75\vec{j})\text{m}$$

e)

$$\overrightarrow{AE} = (1,4\vec{i} - 1,5\vec{j})\text{m} \quad \overrightarrow{AQ} = (2,1\vec{i} - 0,75\vec{j})\text{m}$$

$$\overrightarrow{AE}_{AQ} = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AQ}}{|\overrightarrow{AQ}|} \times \overrightarrow{\mu_{AQ}}$$

$$\overrightarrow{AE}_{AQ} = \frac{1,4 \times 2,1 - 1,5 \times -0,75}{\sqrt{2,1^2 + 0,75^2}} \left(\frac{2,1\vec{i} - 0,75\vec{j}}{\sqrt{2,1^2 + 0,75^2}} \right)$$

$$\overrightarrow{AE}_{AQ} = (1,72\vec{i} - 0,61\vec{j})\text{m}$$

$$|\overrightarrow{AE}_{AQ}| = (1,72\vec{i} - 0,61\vec{j})\text{m}$$

$$|\overrightarrow{AE}_{AQ}| = 1,82\text{m}$$

EJERCICIO N°6

1. Un insecto se mueve rectilíneamente 8cm al Este, luego 12cm al NE y finalmente 5cm al Sur; determinar:
- a) Los desplazamientos realizados
 - b) El desplazamiento total realizado
 - c) El modulo del desplazamiento total
 - d) La distancia total recorrida

SOLUCIÓN:

a)

$$\Delta r_{2x} = 12\text{cm} \cos 45^\circ \quad \Delta r_{2y} = 12\text{cm} \sin 45^\circ$$

$$\Delta r_{2x} = 8,49\text{cm} \quad \Delta r_{2y} = 8,49\text{cm}$$

$$\overrightarrow{\Delta r_1} = (8\vec{i} + 0\vec{j})\text{cm} \quad \overrightarrow{\Delta r_2} = (8,49\vec{i} + 8,49\vec{j})\text{cm} \quad \overrightarrow{\Delta r_3} = (0\vec{i} - 5\vec{j})\text{cm}$$

b)

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{\Delta r_1} + \overrightarrow{\Delta r_2} + \overrightarrow{\Delta r_3}$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = (8\vec{i} + 0\vec{j})\text{cm} + (8,49\vec{i} + 8,49\vec{j})\text{cm} + (0\vec{i} - 5\vec{j})\text{cm}$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = (16,49\vec{i} + 3,49\vec{j})\text{cm}$$

c)

$$|\overrightarrow{\Delta r}| = \sqrt{16,49^2 + 3,49^2}$$

$$|\overrightarrow{\Delta r}| = 16,85\text{ cm}$$

d)

$$d = 8\text{cm} + 12\text{cm} + 5\text{cm}$$

$$d = 25\text{cm}$$

2. Comenzando en el origen de coordenadas se hacen los siguientes desplazamientos en el plano XY: 45mm en la dirección Y(-); 30mm en la dirección X(-) y 76mm a 200° , todos en línea recta; determinar:

- Los desplazamientos realizados
- Los vectores posición en cada punto
- El desplazamiento total realizado
- El módulo del desplazamiento
- La distancia recorrida

SOLUCIÓN:

a)

$$\Delta r_{3x} = 76\text{mm}\cos 200^\circ \quad \Delta r_{3y} = 76\text{mm}\sin 200^\circ$$

$$\Delta r_{3x} = -71,41\text{mm} \quad \Delta r_{3y} = -25,99\text{mm}$$

$$\overrightarrow{\Delta r_1} = (0\vec{i} - 45\vec{j})\text{mm} \quad \overrightarrow{\Delta r_2} = (-30\vec{i} + 0\vec{j})\text{mm} \quad \overrightarrow{\Delta r_3} = (-71,41\vec{i} - 25,99\vec{j})\text{mm}$$

b)

$$\vec{r}_1 = (0\vec{i} - 45\vec{j})\text{mm} \quad \vec{r}_2 = (-30\vec{i} - 45\vec{j})\text{mm}$$

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_2 + \overrightarrow{\Delta r}_3$$

$$\vec{r}_3 = (-30\vec{i} - 45\vec{j})\text{mm} + (-71,41\vec{i} - 25,99\vec{j})\text{mm}$$

$$\vec{r}_3 = (-100,41\vec{i} - 70,99\vec{j})\text{mm}$$

c)

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{\Delta r}_1 + \overrightarrow{\Delta r}_2 + \overrightarrow{\Delta r}_3$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = (0\vec{i} - 45\vec{j})\text{mm} + (-30\vec{i} + 0\vec{j})\text{mm} + (-71,41\vec{i} - 25,99\vec{j})\text{mm}$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = (-100,41\vec{i} - 70,99\vec{j})\text{mm}$$

d)

$$|\overrightarrow{\Delta r}| = \sqrt{100,41^2 + 70,99^2}$$

$$|\overrightarrow{\Delta r}| = 122,97\text{ mm}$$

e)

$$d = 45\text{mm} + 30\text{mm} + 76\text{mm}$$

$$d = 152\text{mm}$$

3. Un auto parte a las 7h00 de una ciudad A(-85, 204)km y la lectura de su odómetro es 10235 km, viaja rectilíneamente hacia B(123, 347)km y llega a las 11h10; determinar:

- a) Los vectores posición de cada ciudad
- b) El desplazamiento realizado
- c) La lectura del odómetro cuando llega a B
- d) La velocidad media
- e) La velocidad media con la que debería regresar de inmediato por la misma ruta para llegar a las 14h15.

SOLUCIÓN:

a)

$$\vec{r}_A = (-85\vec{i} + 204\vec{j})\text{ km} \quad \vec{r}_B = (123\vec{i} + 347\vec{j})\text{ km}$$

b)

$$\begin{aligned}\vec{\Delta r} &= \vec{r}_B - \vec{r}_A \\ \vec{\Delta r} &= (123\vec{i} + 347\vec{j})\text{ km} - (-85\vec{i} + 204\vec{j})\text{ km} \\ \vec{\Delta r} &= (208\vec{i} + 143\vec{j})\text{ km}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}|\vec{\Delta r}| &= \sqrt{208^2 + 143^2} & \text{Lectura} &= 10235\text{ km} + 252,41\text{ km} \\ |\vec{\Delta r}| &= 252,41\text{ km} & \text{Lectura} &= 10487,41\text{ km}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\frac{10\text{ min}}{60\text{ min}} \left| \frac{1\text{ h}}{60\text{ min}} \right| &= 0,166\text{ h} & \Delta t &= t_f - t_0 \\ & & \Delta t &= 11,166\text{ h} - 7\text{ h} \\ & & \Delta t &= 4,166\text{ h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{V}_m &= \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} & V_m &= \frac{\Delta r}{\Delta t} \\ \vec{V}_m &= \frac{(208\vec{i} + 143\vec{j})\text{ km}}{4,166\text{ h}} & V_m &= \frac{252,41\text{ km}}{4,166\text{ h}} \\ \vec{V}_m &= (49,93\vec{i} + 34,33\vec{j})\text{ km/h} & V_m &= 60,58\text{ km/h}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\frac{15\text{ min}}{60\text{ min}} \left| \frac{1\text{ h}}{60\text{ min}} \right| &= 0,25\text{ h} & \Delta t &= t_f - t_0 \\ & & \Delta t &= 14,25\text{ h} - 11,166\text{ h} \\ & & \Delta t &= 3,084\text{ h}\end{aligned}$$

$$V_m = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

$$V_m = \frac{252,41 \text{ km}}{3,084 \text{ h}}$$

$$V_m = 81,85 \text{ km/h}$$

4. Dos aviones parten del mismo punto, el uno viaja a $(865 \text{ km}; 15^\circ)$ hasta A y el otro vuela $(-505 \vec{i} + 253 \vec{j}) \text{ km}$ hasta B en 2 horas en línea recta; determinar:

- Los vectores posición de los puntos A y B
- Los desplazamientos realizados por cada avión
- La velocidad media de cada avión
- La rapidez media de cada avión
- La velocidad media a la que debería viajar un avión desde A hasta B

SOLUCIÓN:

a)

$$(865 \text{ km}; 15^\circ)$$

$$\begin{aligned} r_{Ax} &= 865 \text{ km} \cos 15^\circ & r_{Ay} &= 865 \text{ km} \sin 15^\circ & \vec{r}_A &= (835,53 \vec{i} + 223,88 \vec{j}) \text{ km} \\ r_{Ax} &= 835,53 \text{ km} & r_{Ay} &= 223,88 \text{ km} \end{aligned}$$

$$\vec{r}_B = (-505 \vec{i} + 253 \vec{j}) \text{ km}$$

b)

$$\vec{\Delta r}_A = (835,53 \vec{i} + 223,88 \vec{j}) \text{ km} \quad \vec{\Delta r}_B = (-505 \vec{i} + 253 \vec{j}) \text{ km}$$

c)

$$\overrightarrow{V_{mA}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

$$\overrightarrow{V_{mA}} = \frac{(835,53 \vec{i} + 223,88 \vec{j}) \text{ km}}{2 \text{ h}}$$

$$\overrightarrow{V_{mA}} = (417,77 \vec{i} + 116,94 \vec{j}) \text{ km/h}$$

$$\overrightarrow{V_{mB}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

$$\overrightarrow{V_{mB}} = \frac{(-505 \vec{i} + 253 \vec{j}) \text{ km}}{2 \text{ h}}$$

$$\overrightarrow{V_{mB}} = (-252,5 \vec{i} + 126,5 \vec{j}) \text{ km/h}$$

d)

$$V_{mA} = \sqrt{417,77^2 + 116,94^2}$$

$$V_{mA} = 433,83 \text{ km/h}$$

$$V_{mB} = \sqrt{252,5^2 + 126,5^2}$$

$$V_{mB} = 282,42 \text{ km/h}$$

e)

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = (-505 \vec{i} + 253 \vec{j}) \text{ km} - (835,53 \vec{i} + 223,88 \vec{j}) \text{ km}$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = (-1340,53 \vec{i} + 476,88 \vec{j}) \text{ km}$$

$$\overrightarrow{V_{mA}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

$$\overrightarrow{V_{mA}} = \frac{(-1340,53 \vec{i} + 476,88 \vec{j}) \text{ km}}{3 \text{ h}}$$

$$\overrightarrow{V_{mA}} = (-446,84 \vec{i} + 158,96 \vec{j}) \text{ km/h}$$

$$V_{mA} = \sqrt{446,84^2 + 158,96^2}$$

$$V_{mA} = 474,27 \text{ km/h}$$

5. Una partícula cuya velocidad era de $(12 \vec{i} + 15 \vec{j}) \text{ m/s}$ se detiene en 20s por una ruta rectilínea; determinar:

- El modulo de la velocidad inicial
- El vector unitario de la velocidad inicial
- El vector velocidad final
- La aceleración media de la partícula

SOLUCIÓN:

a)

$$|\vec{V}_0| = \sqrt{12^2 + 15^2}$$

$$|\vec{V}_0| = 19,21 \text{ m/s} \quad \zeta$$

b)

$$\vec{\mu}_{V_0} = \frac{\vec{V}_0}{|\vec{V}_0|}$$

$$\vec{\mu}_{V_0} = \frac{(12 \vec{i} + 15 \vec{j}) \text{ m/s}}{19,21 \text{ m/s}}$$

$$\vec{\mu}_{V_0} = (0,62 \vec{i} + 0,78 \vec{j})$$

c)

Como la partícula recorre hasta detenerse la velocidad final es 0

d)

$$\vec{a} = \frac{\vec{V}_f - \vec{V}_0}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{(-12 \vec{i} - 15 \vec{j}) \text{ m/s}}{20 \text{ s}}$$

$$\vec{a} = (-0,6 \vec{i} - 0,75 \vec{j}) \text{ m/s}$$

6. Un móvil que viaja con una aceleración constante, cambia su velocidad de $(-21 \vec{i} - 18 \vec{j}) \text{ m/s}$ a $(24 \text{ m/s}; S30^\circ E)$; en 10s determinar:

- a) Los vectores unitarios de la velocidad inicial y final
- b) La aceleración media

SOLUCIÓN:

a)

$$(24 \text{ m/s}; S30^\circ E)$$

$$\begin{aligned}
V_{fx} &= |\vec{V}_f| \cos \theta & V_{fy} &= |\vec{V}_f| \sin \theta \\
V_{fx} &= 24 \text{ m/s} \cos 300^\circ & V_{fy} &= 24 \text{ m/s} \sin 300^\circ & \vec{V}_f &= (12 \vec{i} - 20,78 \vec{j}) \text{ m/s} \\
V_{fx} &= 12 \text{ m/s} & V_{fy} &= -20,78 \text{ m/s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\mu}_{V_0} &= \frac{\vec{V}_0}{|\vec{V}_0|} & \vec{\mu}_{V_f} &= \frac{\vec{V}_f}{|\vec{V}_f|} \\
\vec{\mu}_{V_0} &= \frac{(-21 \vec{i} - 18 \vec{j}) \text{ m/s}}{\sqrt{21^2 + 18^2}} & \vec{\mu}_{V_f} &= \frac{(12 \vec{i} - 20,78 \vec{j}) \text{ m/s}}{24 \text{ m/s}} \\
\vec{\mu}_{V_0} &= (-0,76 \vec{i} - 0,65 \vec{j}) \text{ m/s} & \vec{\mu}_{V_f} &= (0,5 \vec{i} - 0,87 \vec{j}) \text{ m/s}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{\vec{V}_f - \vec{V}_0}{\Delta t} \\
\vec{a} &= \frac{(12 \vec{i} - 20,78 \vec{j}) \text{ m/s} - (-21 \vec{i} - 18 \vec{j}) \text{ m/s}}{10 \text{ s}} \\
\vec{a} &= \frac{(33 \vec{i} - 2,78 \vec{j}) \text{ m/s}}{10 \text{ s}} \\
\vec{a} &= (3,3 \vec{i} - 0,278 \vec{j}) \text{ m/s}
\end{aligned}$$

EJERCICIO N° 7

1. Si un vehículo se mueve de la ciudad A(-35, 50)km a la ciudad B(-25, -45)km en línea recta y con rapidez constante en 2 horas; determinar:

- a) El desplazamiento realizado
- b) La velocidad media
- c) El desplazamiento durante los primeros 40 minutos de viaje

SOLUCIÓN:

a)

$$\begin{aligned}
\vec{\Delta r} &= (-25 \vec{i} - 45 \vec{j}) \text{ km} - (-35 \vec{i} + 50 \vec{j}) \text{ km} \\
\vec{\Delta r} &= (10 \vec{i} - 95 \vec{j}) \text{ km}
\end{aligned}$$

b)

$$\vec{V} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

$$\vec{V} = \frac{(10\vec{i} - 95\vec{j})\text{km}}{2\text{h}}$$

$$\vec{V} = (5\vec{i} - 47,5\vec{j})\text{km}$$

c)

$$\frac{40\text{min}}{60\text{min}} \left| \frac{1\text{h}}{60\text{min}} \right| = 0,666\text{h}$$

$$\vec{\Delta r} = \vec{V} \times t$$

$$\vec{\Delta r} = (5\vec{i} - 47,5\vec{j})\text{km/h} \times 0,666\text{h}$$

$$\vec{\Delta r} = (3,33\vec{i} - 31,64\vec{j})\text{km}$$

2. Dos autos A, B se mueven por carreteras rectas horizontales con velocidades constantes de modo que al instante $t=0$ sus posiciones son $(-40\vec{i} + 20\vec{j})$ y $(15\vec{i} - 30\vec{j})\text{m}$ y al instante $t=10\text{s}$ sus posiciones son $(20\vec{i})$ y $(-10\vec{j})\text{km}$ respectivamente; determinar:

- El desplazamiento de cada vehículo durante ese intervalo
- La velocidad media de cada vehículo
- La velocidad de A respecto a B

SOLUCIÓN:

a)

$$\vec{\Delta r}_A = \vec{r}_{fA} - \vec{r}_{0A}$$

$$\vec{\Delta r}_A = (20\vec{i} + 0\vec{j})\text{m} - (-40\vec{i} + 20\vec{j})\text{m}$$

$$\vec{\Delta r}_A = (60\vec{i} - 20\vec{j})\text{m}$$

$$\vec{\Delta r}_B = \vec{r}_{fB} - \vec{r}_{0B}$$

$$\vec{\Delta r}_B = (-10\vec{i} + 0\vec{j})\text{m} - (15\vec{i} - 30\vec{j})\text{m}$$

$$\vec{\Delta r}_B = (-25\vec{i} + 30\vec{j})\text{m}$$

b)

$$\vec{V}_A = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

$$\vec{V}_A = \frac{(60\vec{i} - 20\vec{j})\text{m}}{10\text{s}}$$

$$\vec{V}_A = (6\vec{i} - 2\vec{j})\text{m/s}$$

$$\vec{V}_B = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

$$\vec{V}_B = \frac{(-25\vec{i} + 30\vec{j})\text{m}}{10\text{s}}$$

$$\vec{V}_B = (-2,5\vec{i} + 3\vec{j})\text{m/s}$$

c)

$$\vec{V}_{A/B} = (6\vec{i} - 2\vec{j})\text{m/s} - (-2,5\vec{i} + 3\vec{j})\text{m/s}$$

$$\vec{V}_{A/B} = (8,5\vec{i} - 5\vec{j})\text{m/s}$$

3. Un tren cuya velocidad es $60\vec{i}$ km/h, pasa por un túnel recto de 400 m de largo y desde que penetra la maquina hasta que sale el ultimo vagón demora 30s; determinar:

- a) El desplazamiento del tren en 30, 60 y 90 (s)
b) La longitud del tren

SOLUCIÓN:

a)

$$\frac{60\vec{i} \text{ km}}{\text{h}} \left| \frac{1000\text{m}}{1\text{km}} \right| \left| \frac{1\text{h}}{3600\text{s}} \right| = 16,67 \text{ m/s}$$

$$\Delta r = V \times \Delta t$$

$$\Delta r = 16,67 \text{ m/s} \times 30\text{s}$$

$$\Delta r = 500 \text{ m}$$

$$\Delta r = V \times \Delta t$$

$$\Delta r = 16,67 \text{ m/s} \times 60\text{s}$$

$$\Delta r = 1000 \text{ m}$$

$$\Delta r = V \times \Delta t$$

$$\Delta r = 16,67 \text{ m/s} \times 90\text{s}$$

$$\Delta r = 1500 \text{ m}$$

b)

$$x = \Delta r - 400 \text{ m}$$

$$x = 500 \text{ m} - 400 \text{ m}$$

$$x = 100 \text{ m}$$

4. Una partícula parte del punto (25, 20)m y moviéndose rectilíneamente llega al punto (-6, -30)m con una rapidez constante de 40 km/h ; determinar:
- La velocidad empleada
 - El tiempo empleado
 - El punto al que llegaría si continúa moviéndose por 10s más.

SOLUCIÓN:

a)

$$\frac{40 \text{ km}}{\text{h}} \left| \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right| \left| \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right| = 11,11 \text{ m/s}$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_f - \vec{r}_0$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = (-6\vec{i} - 30\vec{j})\text{m} - (25\vec{i} + 20\vec{j})\text{m}$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = (-31\vec{i} - 50\vec{j})\text{m}$$

$$|\overrightarrow{\Delta r}| = \sqrt{31^2 + 50^2}$$

$$|\overrightarrow{\Delta r}| = 58,83 \text{ m}$$

$$\vec{V} = |\vec{V}| \times \overrightarrow{\mu_{\Delta r}}$$

$$\vec{V} = 11,11 \text{ m/s} \times \left(\frac{-31\vec{i} - 50\vec{j}}{\sqrt{31^2 + 50^2}} \right)$$

$$\vec{V} = (-5,85\vec{i} - 9,44\vec{j}) \text{ m/s}$$

b)

$$\Delta t = \frac{\Delta r}{V_A}$$

$$\Delta t = \frac{58,83 \text{ m}}{11,11 \text{ m/s}}$$

$$\Delta t = 5,30 \text{ s}$$

c)

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{V} \times \Delta t$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = (-5,85\vec{i} - 9,44\vec{j}) \text{ m/s} \times 10 \text{ s}$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = (-58,5\vec{i} - 94,4\vec{j}) \text{ m}$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{\Delta r_1} + \overrightarrow{\Delta r_2}$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = (-31\vec{i} - 50\vec{j}) \text{ m} + (-58,5\vec{i} - 94,4\vec{j}) \text{ m}$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = (-89,5\vec{i} - 144,4\vec{j}) \text{ m}$$

5. Un deportista se desplaza $1000 \vec{i}$ km por una ruta rectilínea, parte en moto y parte en bicicleta, sabiendo que las velocidades han sido $120 \vec{i}$ km/h en moto y $40 \vec{i}$ km/h en bicicleta y que el tiempo empleado ha sido 10 horas; determinar:

- La velocidad media durante las 10 horas
- El desplazamiento en moto
- El tiempo que recorrió en bicicleta

SOLUCIÓN:

a)

$$\vec{V} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

$$\vec{V} = \frac{1000 \vec{i} \text{ km}}{10 \text{ h}}$$

$$\vec{V} = 100 \vec{i} \text{ km/h}$$

b)

$$\vec{\Delta r} = \vec{\Delta r}_{\text{moto}} + \vec{\Delta r}_{\text{bici}} \dots \dots \dots (1)$$

$$\Delta t = \Delta t_{\text{moto}} + \Delta t_{\text{bici}}$$

$$\Rightarrow \Delta t_{\text{bici}} = \Delta t - \Delta t_{\text{moto}} \dots \dots \dots (2)$$

$$\vec{\Delta r}_{\text{moto}} = \vec{V}_{\text{moto}} \times \Delta t_{\text{moto}} \dots \dots \dots (3)$$

$$\vec{\Delta r}_{\text{bici}} = \vec{V}_{\text{bici}} \times \Delta t_{\text{bici}} \dots \dots \dots (4)$$

(3) y (4) en (1)

$$\vec{\Delta r} = \vec{V}_{\text{moto}} \times \Delta t_{\text{moto}} + \vec{V}_{\text{bici}} \times \Delta t_{\text{bici}} \dots \dots \dots (5)$$

(2) en (5)

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{V_{moto}} \times \Delta t_{moto} + \overrightarrow{V_{bici}} \times (\Delta t - \Delta t_{moto})$$

$$\overrightarrow{V_{moto}} \times \Delta t_{moto} + \overrightarrow{V_{bici}} \times \Delta t - \overrightarrow{V_{bici}} \times \Delta t_{moto} = \overrightarrow{\Delta r}$$

$$\overrightarrow{V_{moto}} \times \Delta t_{moto} - \overrightarrow{V_{bici}} \times \Delta t_{moto} = \overrightarrow{\Delta r} - \overrightarrow{V_{bici}} \times \Delta t$$

$$\Delta t_{moto} (\overrightarrow{V_{moto}} - \overrightarrow{V_{bici}}) = \overrightarrow{\Delta r} - \overrightarrow{V_{bici}} \times \Delta t$$

$$\Delta t_{moto} = \frac{\overrightarrow{\Delta r} - \overrightarrow{V_{bici}} \times \Delta t}{\overrightarrow{V_{moto}} - \overrightarrow{V_{bici}}}$$

$$\Delta t_{moto} = \frac{1000 \text{ km} - 40 \text{ km/h} \times 10 \text{ h}}{120 \text{ km/h} - 40 \text{ km/h}}$$

$$\Delta t_{moto} = 7,5 \text{ h}$$

$$\overrightarrow{\Delta r_{moto}} = 120 \text{ km/h} \times 7,5 \text{ h}$$

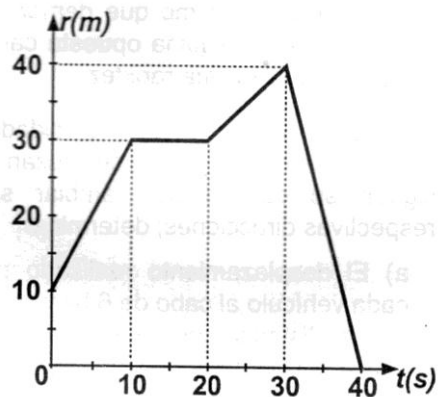
$$\overrightarrow{\Delta r_{moto}} = 900 \text{ km}$$

c)

$$\Delta t_{bici} = 10 \text{ h} - 7,5 \text{ h}$$

$$\Delta t_{bici} = 2,5 \text{ h}$$

6. Una partícula se mueve de acuerdo al grafico posición-tiempo:



Determinar:

- La posición inicial
- La rapidez en cada tramo del viaje
- El tiempo que permaneció en reposo
- La posición cuando $t=35(s)$
- Cuándo la partícula está a 20m del origen y cuando esta en el origen

SOLUCIÓN:

a)

$$\vec{r}_0 = 10\text{m}$$

b)

Tramo 1

Tramo 2

Tramo 3

$$V = \frac{r_f - r_0}{t_f - t_0}$$

$$V = \frac{r_f - r_0}{t_f - t_0}$$

$$V = \frac{30\text{m} - 10\text{m}}{10\text{s}}$$

Reposo

$$V = \frac{40\text{m} - 30\text{m}}{30\text{s} - 20\text{s}}$$

$$V = 2\text{m/s}$$

$$V = 10\text{m/s}$$

Tramo 4

$$V = \frac{r_f - r_0}{t_f - t_0}$$

$$V = \frac{0\text{m} - 40\text{m}}{40\text{s} - 30\text{s}}$$

$$V = -4\text{m/s}$$

c)

$$\Delta t = 20\text{s} - 10\text{s}$$

$$\Delta t = 10\text{s}$$

d)

$$\Delta r = V \times t$$

$$\Delta r = 4\text{m/s} \times 5\text{s}$$

$$\Delta r = 20\text{m}$$

e)

Está a 20m del origen a los 5s y a los 35s, y se encuentra en el origen a los 40s

7. Una persona parte de la esquina (0, 0) de una cancha de futbol que mide 100m x 60m y camina primero por detrás del arco Sur, lado que se hace coincidir con el eje X(+), hacia el Este y continúa su recorrido bordeando todo su perímetro a una rapidez constante igual a 2m/s ; determinar:

- a) La velocidad en cada tramo
- b) El tiempo que demora en recorrer cada lado
- c) El desplazamiento y la distancia recorrida cuando ha llegado a la esquina opuesta que partió
- d) El tiempo mínimo que demoraría en llegar a la esquina opuesta caminando a esa misma rapidez

SOLUCIÓN:

a)

Como se mueve tanto en el eje X como Y con rapidez constante la velocidad en cada tramo será:

Tramo 1	Tramo 2	Tramo 3	Tramo 4
$\vec{V} = (2\vec{i}) \text{ m/s}$	$\vec{V} = (2\vec{j}) \text{ m/s}$	$\vec{V} = (-2\vec{i}) \text{ m/s}$	$\vec{V} = (-2\vec{j}) \text{ m/s}$

b)

Lado 1	Lado 2	Lado 3	Lado 4
$\Delta t = \frac{\Delta r}{V}$	$\Delta t = \frac{\Delta r}{V}$	$\Delta t = \frac{\Delta r}{V}$	$\Delta t = \frac{\Delta r}{V}$
$\Delta t = \frac{60 \text{ m}}{2 \text{ m/s}}$	$\Delta t = \frac{100 \text{ m}}{2 \text{ m/s}}$	$\Delta t = \frac{60 \text{ m}}{2 \text{ m/s}}$	$\Delta t = \frac{100 \text{ m}}{2 \text{ m/s}}$
$\Delta t = 30 \text{ s}$	$\Delta t = 50 \text{ s}$	$\Delta t = 30 \text{ s}$	$\Delta t = 50 \text{ s}$

c)

Como recorre 60m en el eje X y 100 en Y el desplazamiento será:

$$\vec{\Delta r} = (60\vec{i} + 100\vec{j}) \text{ m} \quad \Delta r = \sqrt{60^2 + 100^2}$$

$$\Delta r = 116,62 \text{ m}$$

d)

$$\Delta t = \frac{\Delta r}{V}$$

$$\Delta t = \frac{116,62 \text{ m}}{2 \text{ m/s}}$$

$$\Delta t = 58,31 \text{ s}$$

8. Dos vehículos cuyas velocidades son $10 \vec{i} \text{ km/h}$ y $12 \vec{j} \text{ km/h}$ se cruzan y siguen su camino sin cambiar sus respectivas direcciones; determinar:

- El desplazamiento realizado por cada vehículo al cabo de 6 horas
- La distancia que los separa al cabo de 6 horas
- En qué tiempo desde que se cruzan estarán a 100 km de distancia

SOLUCIÓN:

a)

$$\overrightarrow{\Delta r_A} = \overrightarrow{V_A} \times \Delta t$$

$$\overrightarrow{\Delta r_A} = 10 \vec{i} \text{ km/h} \times 6 \text{ h}$$

$$\overrightarrow{\Delta r_A} = 60 \vec{i} \text{ km}$$

$$\overrightarrow{\Delta r_B} = \overrightarrow{V_B} \times \Delta t$$

$$\overrightarrow{\Delta r_B} = 12 \vec{j} \text{ km/h} \times 6 \text{ h}$$

$$\overrightarrow{\Delta r_B} = 72 \vec{j} \text{ km}$$

b)

$$\overrightarrow{\Delta r_{A-B}} = (60 \vec{i} + 72 \vec{j}) \text{ km}$$

$$|\overrightarrow{\Delta r_{A-B}}| = \sqrt{60^2 + 72^2}$$

$$|\overrightarrow{\Delta r_{A-B}}| = 93,72 \text{ km}$$

c)

$$\sqrt{(10 \text{ km/h} \times t)^2 + (12 \text{ km/h} \times t)^2} = 100 \text{ km}$$

$$\sqrt{100 \text{ km}^2 / \text{h}^2 \times t^2 + 144 \text{ km}^2 / \text{h}^2 \times t^2} = 100 \text{ km}$$

$$\sqrt{244 \text{ km}^2 / \text{h}^2 \times t^2} = 100 \text{ km}$$

$$t \sqrt{244} \text{ km/h} = 100 \text{ km}$$

$$t = \frac{100 \text{ km}}{\sqrt{244} \text{ km/h}}$$

$$t = 6,40 \text{ h}$$

9. Dos puntos A y B están separados 80m. Desde A parte hacia B un móvil con una rapidez constante de 3 m/s . Cinco segundos después y desde B un móvil con la misma dirección y sentido que el primero y con una rapidez constante de 2 m/s ; determinar:

- a) Analíticamente y gráficamente cuando y donde se encuentran
b) En qué tiempo la distancia que los separa será nuevamente 80m

SOLUCIÓN:

a)

$$t_B = t_A - 5s \dots\dots\dots(1) \quad \Delta r_B = \Delta r_A - 80m \dots\dots\dots(2)$$

$$V = \frac{\Delta r}{t}$$

$$\Rightarrow \Delta r_A = V_A \times t_A \dots\dots\dots(3)$$

$$\Rightarrow \Delta r_B = V_B \times t_B \dots\dots\dots(4)$$

(3) y (4) en (2)

$$V_B \times t_B = V_A \times t_A - 80m \dots\dots\dots(5)$$

(1) en (5)

$$V_B (t_A - 5s) = V_A \times t_A - 80m$$

$$V_B \times t_A - V_B \times 5s = V_A \times t_A - 80m$$

$$V_A \times t_A - V_B \times t_A = 80m - V_B \times 5s$$

$$t_A (V_A - V_B) = 80m - V_B \times 5s$$

$$t_A = \frac{80m - V_B \times 5s}{V_A - V_B}$$

$$t_A = \frac{80m - 2m/s \times 5s}{3m/s - 2m/s}$$

$$t_A = 70s$$

$$\Rightarrow \Delta r_A = V_A \times t_A$$

$$\Delta r_A = 3m/s \times 70s$$

$$\Delta r_A = 210m$$



b)

Después de encontrarse

$$\Delta r_A = \Delta r_B + 80 \text{ m} \dots\dots\dots (1) \qquad t_A = t_B \dots\dots\dots (2)$$

$$V = \frac{\Delta r}{t}$$

$$\Rightarrow \Delta r_A = V_A \times t_A \dots\dots\dots (3)$$

$$\Rightarrow \Delta r_B = V_B \times t_B \dots\dots\dots (4)$$

(3) y (4) en (1)

$$V_A \times t_A = V_B \times t_B + 80 \text{ m} \dots\dots\dots (5)$$

(2) en (5)

$$V_A \times t_A = V_B \times t_A + 80 \text{ m}$$

$$V_A \times t_A - V_B \times t_A = 80 \text{ m}$$

$$t_A = \frac{80 \text{ m}}{V_A - V_B}$$

$$t_A = \frac{80 \text{ m}}{3 \text{ m/s} - 2 \text{ m/s}}$$

$$t_A = 80 \text{ s}$$

Desde que el móvil partió desde A

$$t = 70 \text{ s} + 80 \text{ s}$$

$$t = 150 \text{ s}$$

10. Dos autos A y B parten simultáneamente, A con una velocidad de $53 \vec{i} \text{ km/h}$ y B con una velocidad de $32 \vec{i} \text{ km/h}$, si los autos se encuentran al cabo de 2,4 horas; determinar:

- a) La distancia que los separaba inicialmente
- b) El tiempo en que A llega al punto donde partió B
- c) El tiempo que demoraría B en llegar al punto de partida A, suponiendo que en el instante en que encuentran B invierte el sentido

SOLUCIÓN:

a)

$$V = \frac{\Delta r}{t}$$

$$x = \Delta r_A - \Delta r_B \dots\dots\dots(1)$$

$$\Rightarrow \Delta r_A = V_A \times t_A \dots\dots\dots(2)$$

$$\Rightarrow \Delta r_B = V_B \times t_B \dots\dots\dots(3)$$

(2) y (3) en (1)

$$x = V_A \times t_A - V_B \times t_B$$

$$x = 53 \text{ km/h} \times 2,4 \text{ h} - 32 \text{ km/h} \times 2,4 \text{ h}$$

$$x = 50,4 \text{ km}$$

b)

$$t = \frac{\Delta r}{V}$$

$$t = \frac{50,4 \text{ km}}{53 \text{ km/h}}$$

$$t = 0,95 \text{ h}$$

c)

Desde el punto de encuentro

$$t = \frac{\Delta r_A}{V_B}$$

$$t = \frac{53 \text{ km/h} \times 2,4 \text{ h}}{32 \text{ km/h}}$$

$$t = 3,98 \text{ h}$$

11. Dos automóviles viajan en la misma ruta rectilínea y están a 134km de distancia, si el mas rápido viaja a 63 km/ h ; determinar:

- La rapidez del mas lento, si los dos viajan en el mismo sentido y se encuentran al cabo de 3 horas
- Dónde y cuándo se encuentran si los dos viajan en sentido contrario y con la rapidez dada para el más rápido y la obtenida en el punto anterior para el otro

SOLUCIÓN:

a)

Desplazamiento del más rápido

$$\Delta r_A = V_A \times t$$

$$\Delta r_A = 63 \text{ km/h} \times 3 \text{ h}$$

$$\Delta r_A = 189 \text{ km}$$

Desplazamiento del más lento

$$\Delta r_B = \Delta r_A - 134 \text{ km}$$

$$\Delta r_B = 189 \text{ km} - 134 \text{ km}$$

$$\Delta r_B = 55 \text{ km}$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{\Delta r_B}{\Delta t}$$

$$V_B = \frac{55 \text{ km}}{3 \text{ h}}$$

$$V_B = 18,33 \text{ km/h}$$

b)

$$\Delta r_A + \Delta r_B = 134 \text{ km} \dots\dots\dots(1)$$

$$t_1 = t_2 \dots\dots\dots(2)$$

$$\Delta r_A = V_A \times t_1 \dots\dots\dots(3)$$

$$\Delta r_B = V_B \times t_2 \dots\dots\dots(4)$$

(2) en (5)

$$V_A \times t_1 + V_B \times t_1 = 134 \text{ km}$$

$$t_1 (V_A + V_B) = 134 \text{ km}$$

$$t_1 = \frac{134 \text{ km}}{V_A + V_B}$$

(3) y (4) en (1)

$$V_A \times t_1 + V_B \times t_2 = 134 \text{ km} \dots\dots\dots(5)$$

$$t_1 = \frac{134 \text{ km}}{63 \text{ km/h} + 18,33 \text{ km/h}}$$

$$t_1 = 1,65 \text{ h}$$

12. Dos puntos A y B están en la misma horizontal, desde A parte hacia B un móvil con una rapidez constante de 2 m/s y 5 minutos después parte desde B hacia A otro móvil a 10 km/h, si A y B distan 3km; determinar:

a) Analíticamente, dónde y cuándo se encuentran

b) Gráficamente, dónde y cuándo se encuentran

SOLUCIÓN:

Datos:

$$V_A = 2 \text{ m/s}$$

$$V_B = 10 \text{ km/h}$$

$$t_{B\text{-reposo}} = 5 \text{ min}$$

$$\Delta r = 3 \text{ km}$$

$$\frac{10 \text{ km}}{\text{h}} \left| \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right| \left| \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right| = 2,78 \text{ m/s}$$

$$\frac{5 \text{ min}}{1 \text{ min}} \left| \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \right| = 300 \text{ s}$$

$$\frac{3 \text{ km}}{1 \text{ km}} \left| \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right| = 3000 \text{ m}$$

a)

$$\Delta r_A + \Delta r_B = 3000 \text{ m} \dots\dots\dots(1)$$

$$t_1 = t_2 + 300 \text{ s} \dots\dots\dots(2)$$

$$\Delta r_A = V_A \times t_1 \dots\dots\dots(3)$$

$$\Delta r_B = V_B \times t_2 \dots\dots\dots(4)$$

(2) en (5)

$$V_A \times (t_2 + 300 \text{ s}) + V_B \times t_1 = 3000 \text{ m}$$

$$V_A \times t_2 + V_A \times 300 \text{ s} + V_B \times t_1 = 3000 \text{ m}$$

$$t_1 (V_A + V_B) = 3000 \text{ m} - V_A \times 300 \text{ s}$$

$$t_1 = \frac{3000 \text{ m} - V_A \times 300 \text{ s}}{V_A + V_B}$$

$$t_1 = \frac{3000 \text{ m} - 2 \text{ m/s} \times 300 \text{ s}}{2 \text{ m/s} + 2,78 \text{ m/s}}$$

$$t_1 = 502,1 \text{ s}$$

(3) y (4) en (1)

$$V_A \times t_1 + V_B \times t_2 = 3000 \text{ m} \dots\dots\dots(5)$$

$$t_1 = 502,1 \text{ s} + 300 \text{ s}$$

$$t_1 = 802,1 \text{ s}$$

$$\Delta r_A = 2 \text{ m/s} \times 802,1 \text{ s}$$

$$\Delta r_B = 3000 \text{ m} - 1604,2 \text{ m}$$

$$\Delta r_A = 1604,2 \text{ m}$$

$$\Delta r_B = 1395,8 \text{ m}$$

b)



EJERCICIO N°8

1. Una partícula se mueve con MRUV retardado y aceleración $(15\text{ m/s}^2; \text{N}15^\circ \text{ E})$. Si a $t=0$, la partícula se encuentra en la posición $(-2, 3)\text{ m}$ y su rapidez es de 8 m/s . Para un intervalo entre 0 y 8 s ; determinar:

- El desplazamiento realizado
- La velocidad media

SOLUCIÓN:

a)

$$(15\text{ m/s}^2; \text{N}15^\circ \text{ E})$$

$$\begin{aligned} a_x &= 15\text{ m/s}^2 \cos 75^\circ & a_y &= 15\text{ m/s}^2 \sin 75^\circ & \vec{a} &= (3,88\vec{i} + 14,49\vec{j})\text{ m/s}^2 \\ a_x &= 3,88\text{ m/s}^2 & a_y &= 14,49\text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$\vec{r}_0 = (-2\vec{i} + 3\vec{j})\text{ m}$$

Para que sea retardado

$$\vec{\mu}_a = -\vec{\mu}_{V_0}$$

$$\vec{\mu}_a = \frac{(3,88\vec{i} + 14,49\vec{j})}{\sqrt{3,88^2 + 14,49^2}}$$

$$\vec{\mu}_a = (0,26\vec{i} + 0,97\vec{j}) \rightarrow \vec{\mu}_{V_0} = (-0,26\vec{i} - 0,97\vec{j})$$

$$\vec{V}_0 = 8\text{m/s}(-0,26\vec{i} - 0,97\vec{j})$$

$$\vec{V}_0 = (-2,08\vec{i} - 7,76\vec{j})\text{m/s}$$

$$\vec{\Delta r} = \vec{V}_0 \times t + \frac{1}{2}\vec{a} \times t^2$$

$$\vec{\Delta r} = (-2,08\vec{i} - 7,76\vec{j})\text{m/s} \times 8\text{s} + \frac{1}{2}(3,88\vec{i} + 14,49\vec{j})\text{m/s}^2 \times (8\text{s})^2$$

$$\vec{\Delta r} = (107,52\vec{i} + 401,6\vec{j})\text{m}$$

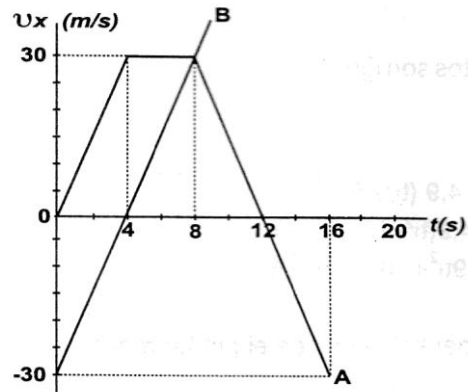
b)

$$V_m = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

$$V_m = \frac{(107,52\vec{i} + 401,6\vec{j})\text{m}}{8\text{s}}$$

$$V_m = (13,44\vec{i} + 50,2\vec{j})\text{m/s}$$

2. El grafico V_x-t , representa el movimiento de dos partículas A y B que parten de dos partículas A y B que parten de una misma posición inicial y sobre la misma trayectoria rectilínea.



Determinar:

- El tipo de movimiento de cada partícula en cada intervalo
- La distancia que recorre cada partícula de 0(s) hasta 12(s)
- La distancia que existe entre las dos partículas a los 4(s), 8(s) y 12 (s)
- Dónde y cuándo se encontrarán gráfica y analíticamente
- Los gráficos $r_x - t$ y $a_x - t$ de cada partícula

SOLUCIÓN:

a)

Partícula A

0-4s	4-8s	8-16
MRUVA	MRU	MRUVR

Partícula B

0-8s
MRUVA

b)

Partícula A:

Intervalo de 0 a 4s

$$a = \frac{V}{t}$$

$$a = \frac{30 \text{ m/s}}{4 \text{ s}}$$

$$a = 7,5 \text{ m/s}$$

$$\Delta r = \cancel{V_0 \times t} + \frac{1}{2} a \times t^2$$

$$\Delta r = \frac{1}{2} (7,5 \text{ m/s}^2) \times (4 \text{ s})^2$$

$$\Delta r = 60 \text{ m}$$

Intervalo de 4 a 8s

$$\Delta r = V \times t$$

$$\Delta r = 30 \text{ m/s} \times 4 \text{ s}$$

$$\Delta r = 120 \text{ m}$$

Intervalo de 8 a 12s

$$a = \frac{V}{t}$$

$$a = \frac{-30 \text{ m/s}}{4 \text{ s}}$$

$$a = -7,5 \text{ m/s}$$

$$\Delta r = V_0 \times t + \frac{1}{2} a \times t^2$$

$$\Delta r = 30 \text{ m/s} \times 4 \text{ s} + \frac{1}{2} (7,5 \text{ m/s}^2) \times (4 \text{ s})^2$$

$$\Delta r = 180 \text{ m}$$

$$\Delta r = 60 \text{ m} + 120 \text{ m} + 180 \text{ m}$$

$$\Delta r = 360 \text{ m}$$

Partícula B

Intervalo de 0 a 12s

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

$$a = \frac{30 \text{ m/s}}{4 \text{ s}}$$

$$a = 7,5 \text{ m/s}$$

$$\Delta r = V_0 \times t + \frac{1}{2} a \times t^2$$

$$\Delta r = -30 \text{ m/s} \times 12 + \frac{1}{2} (7,5 \text{ m/s}^2) \times (12 \text{ s})^2$$

$$\Delta r = 180 \text{ m}$$

c)

Desplazamiento de la partícula B de 0 a 4 s

$$\Delta r = V_0 \times t + \frac{1}{2} a \times t^2$$

$$\Delta r = -30 \text{ m/s} \times 4 \text{ s} + \frac{1}{2} (7,5 \text{ m/s}^2) \times (4 \text{ s})^2$$

$$\Delta r = -60 \text{ m}$$

$$\Delta r_{A/B} = 60 \text{ m} - (-60 \text{ m})$$

$$\boxed{\Delta r_{A/B} = 120 \text{ m}}$$

Desplazamiento de la partícula B de 0 a 8s

$$\Delta r = V_0 \times t + \frac{1}{2} a \times t^2$$

$$\Delta r = -30 \text{ m/s} \times 8 \text{ s} + \frac{1}{2} (7,5 \text{ m/s}^2) \times (0 \text{ s})^2$$

$$\Delta r = 0 \text{ m}$$

Desplazamiento de la partícula A de 0 a 8s

$$\Delta r = 60 \text{ m} + 120 \text{ m}$$

$$\Delta r = 180 \text{ m}$$

$$\boxed{\Delta r_{A/B} = 180 \text{ m}}$$

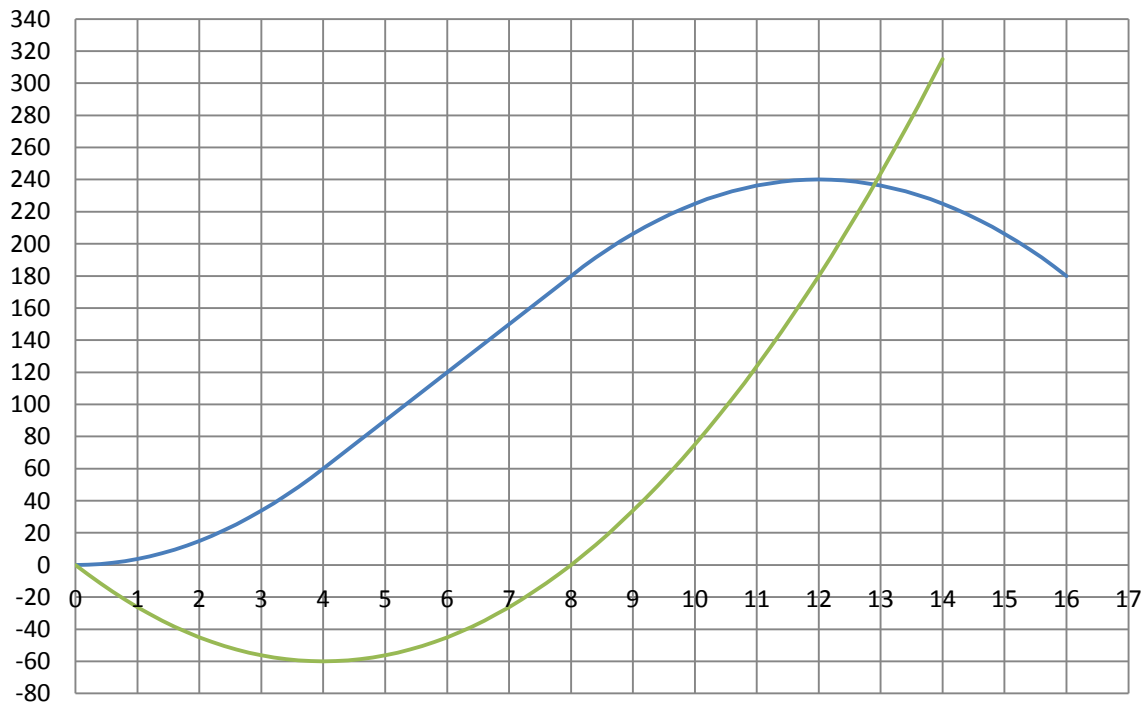
Distancia de A a B a 12s

$$\Delta r_{A/B} = 240 \text{ m} - 180 \text{ m}$$

$$\boxed{\Delta r_{A/B} = 60 \text{ m}}$$

d)

Gráfico r(x)-t Partícula A y B



Tomando la distancia que los separa a los 12s que es 60m

$$\Delta r = \Delta r_A + \Delta r_B$$

$$60 \text{ m} = \cancel{V_{0A}} \times t + \frac{1}{2} a t^2 + V_{0B} \times t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$60 \text{ m} = 7,5 \text{ m/s}^2 t^2 + 60 \text{ m/s} \times t$$

$$7,5 \text{ m/s}^2 t^2 + 60 \text{ m/s} \times t - 60 \text{ m} = 0$$

$$t = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 + 4 \times 7,5 \times 60}}{2 \times 7,5}$$

$$t_1 = 0,898 \text{ s}$$

$$t_2 = -8,898$$

$$\Delta r = 240 \text{ m} - \frac{1}{2} 7,5 \text{ m/s}^2 (0,898)^2$$

$$\Delta r = 236,98 \text{ m}$$

e)

Gráfico $r(x)$ -t Partícula A

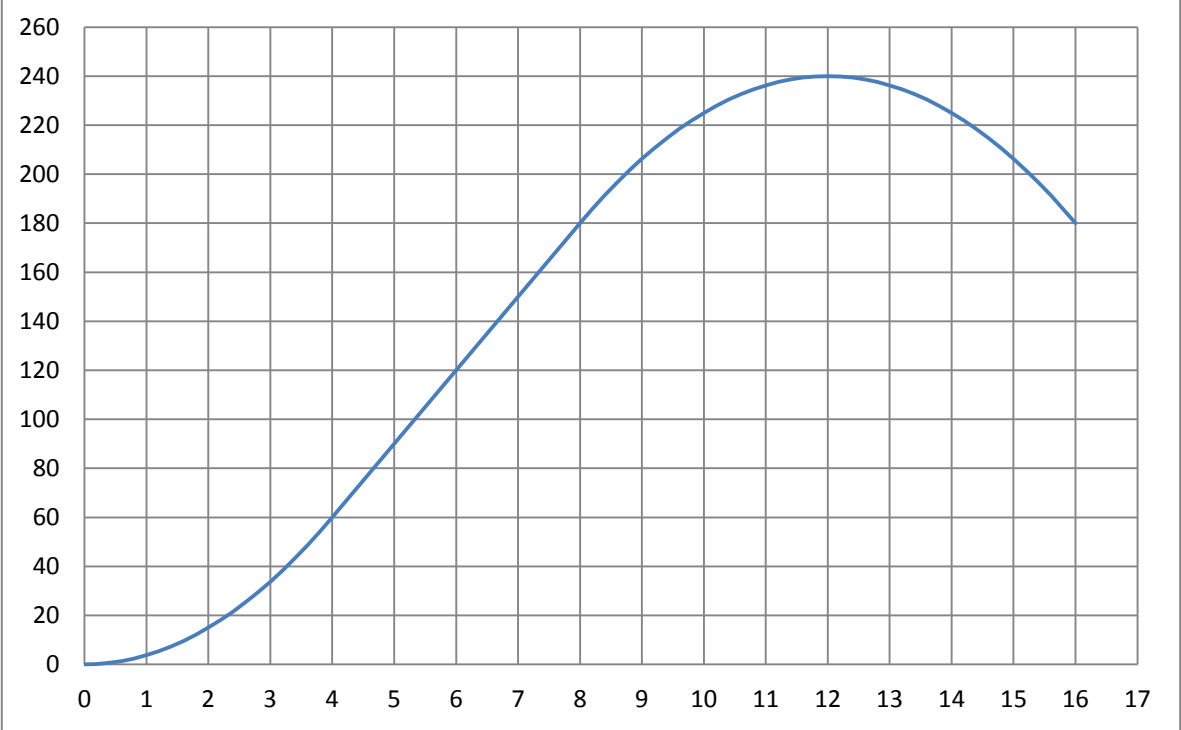


Gráfico $r(x)$ -t Partícula B

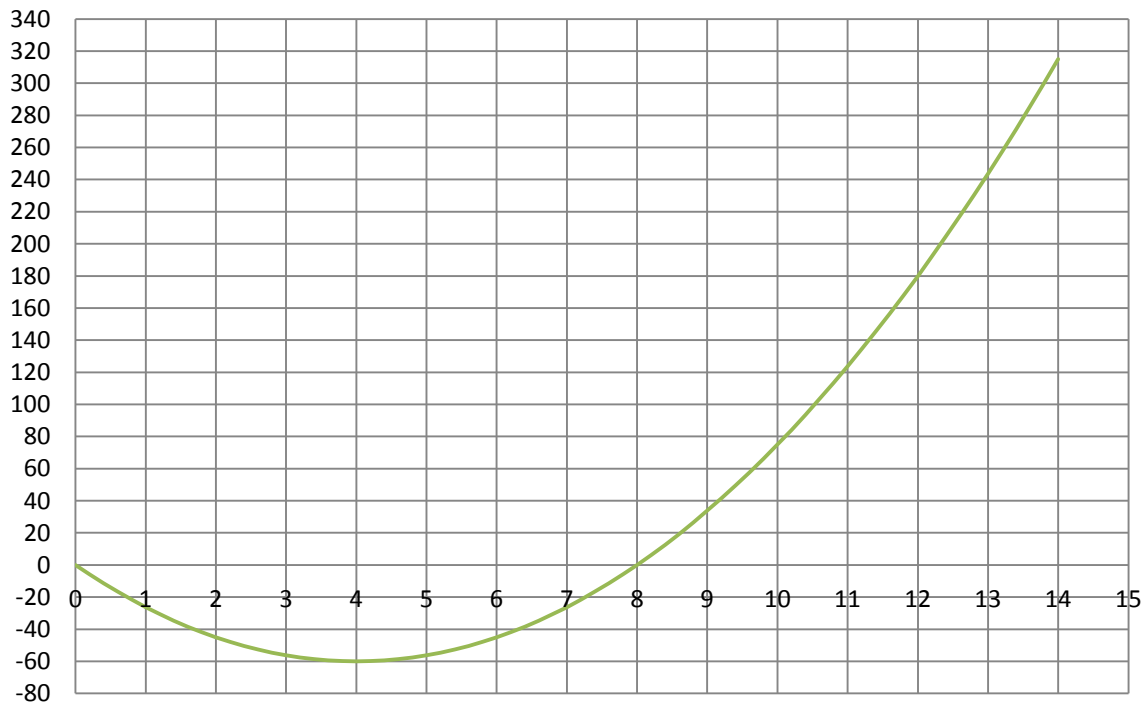
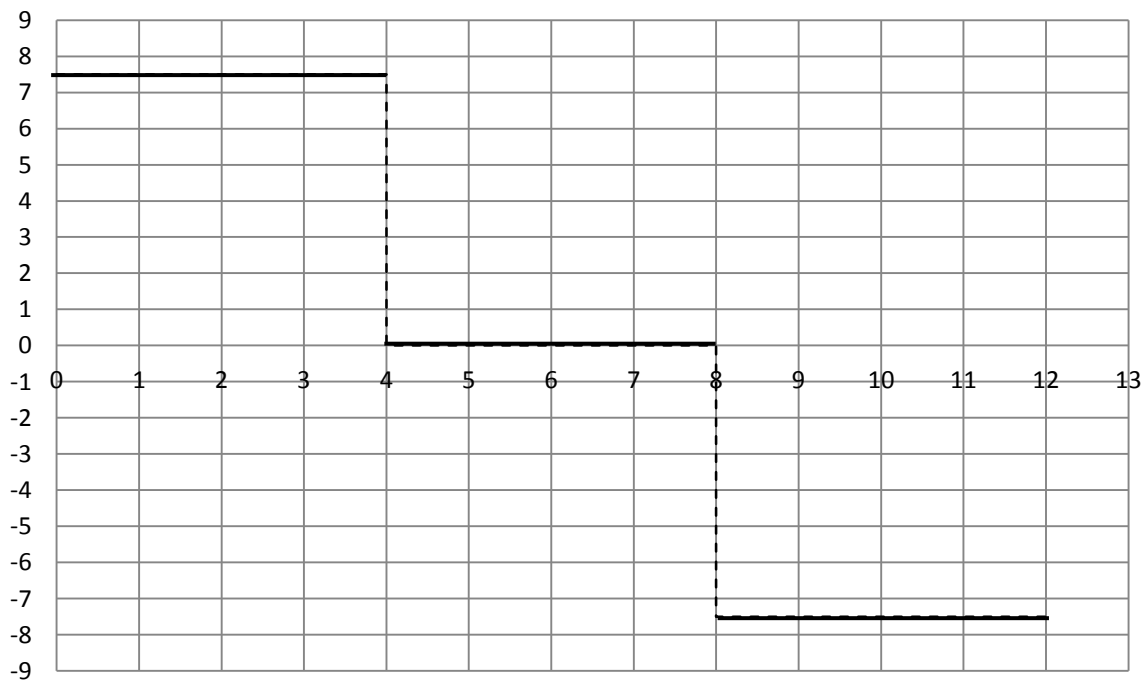
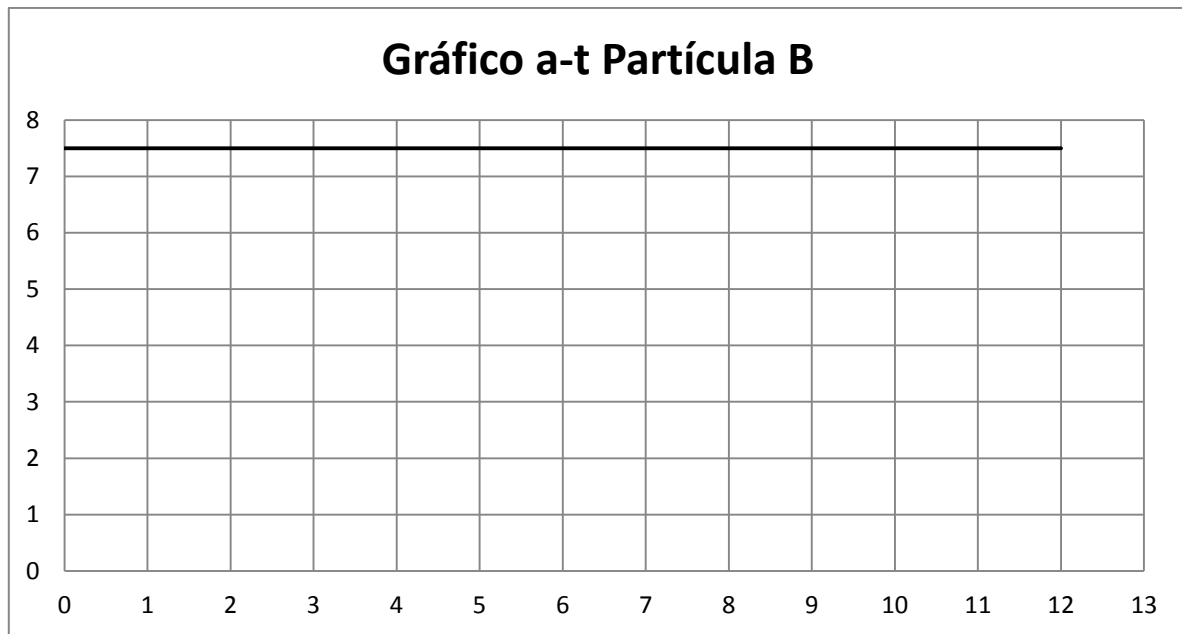


Gráfico a -t Partícula A





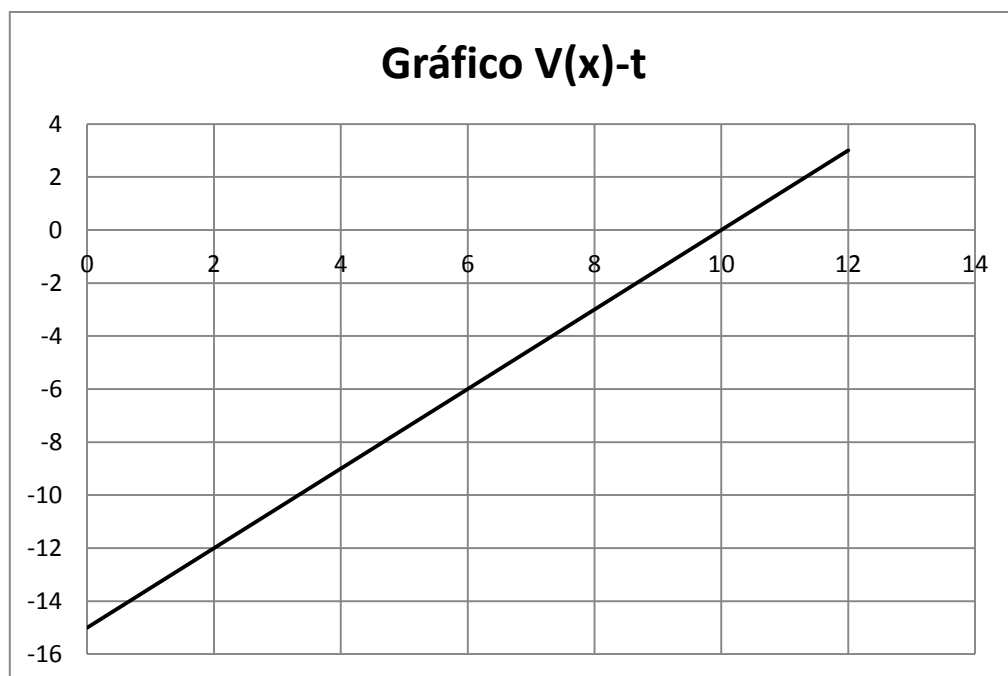
3. Un móvil se desplaza a lo largo del eje X con una aceleración constante. Si su posición para $t=0$ es $30\vec{i}$ m y se mueve en dirección X negativa con una rapidez de 15 m/s que está disminuyendo a razón de 1,5 m/s cada s; determinar:
- La aceleración
 - El gráfico velocidad contra tiempo
 - El gráfico posición contra tiempo
 - El tiempo que tarda la partícula en recorrer los primeros 75m

SOLUCIÓN:

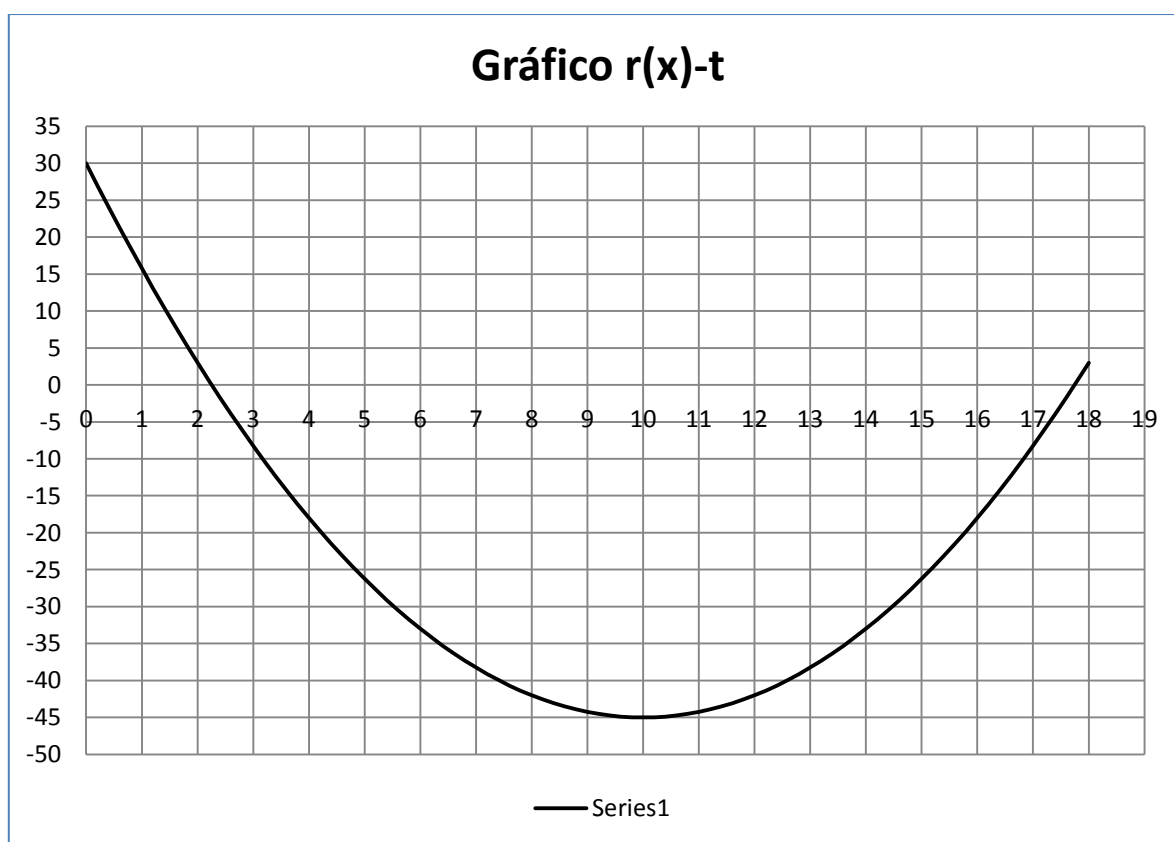
a)

$$a = 1,5\vec{i} \text{ m/s}^2$$

b)



c)



d)

$$\Delta r = V_0 \times t - \frac{1}{2} a \times t^2$$

$$75 \text{ m} = 15 \text{ m/s} \times t - \frac{1}{2} 1,5 \text{ m/s}^2 \times t^2$$

$$0,75 \text{ m/s}^2 \times t^2 - 15 \text{ m/s} \times t - 75 \text{ m} = 0$$

$$t = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \times 0,75 \times 75}}{2 \times 0,75}$$

$$t = 10 \text{ s}$$

4. El móvil A parte al encuentro con B, con una rapidez inicial de 10 m/s y acelerando a 3 m/s² en línea recta; cinco segundos más tarde B parte hacia A desde el reposo y con una aceleración constante de 5 m/s² también en línea recta. Si inicialmente A y B están separados una distancia horizontal de 1700m; determinar:

- a) Dónde y cuándo se encuentran
- b) En cuánto tiempo quedan a 500m de distancia mientras se acercan y también mientras se alejan

SOLUCIÓN:

a)

$$\Delta r = \Delta r_A + \Delta r_B$$

$$1700 \text{ m} = V_{0A} \times t_A + \frac{1}{2} a_A \times t_A^2 + \frac{1}{2} a_B \times t_B^2 \dots\dots\dots(1)$$

$$t_A = t_B + 5 \text{ s} \dots\dots\dots(2)$$

(2) en (1)

$$1700\text{ m} = V_{0A} \times (t_B + 5\text{ s}) + \frac{1}{2} a_A \times (t_B + 5\text{ s})^2 + \frac{1}{2} a_B \times t_B^2$$

$$1700\text{ m} = V_{0A} \times t_B + V_{0A} \times 5\text{ s} + \frac{1}{2} a_A \times (t_B^2 + 10\text{ s} \times t_B + 25\text{ s}^2) + \frac{1}{2} a_B \times t_B^2$$

$$1700\text{ m} = V_{0A} \times t_B + V_{0A} \times 5\text{ s} + \frac{1}{2} a_A \times t_B^2 + \frac{1}{2} a_A \times 10\text{ s} \times t_B + \frac{1}{2} a_A \times 25\text{ s}^2 + \frac{1}{2} a_B \times t_B^2$$

$$1700\text{ m} = 10\text{ m/s} \times t_B + 10\text{ m/s} \times 5\text{ s} + \frac{1}{2} 3\text{ m/s}^2 \times t_B^2 + \frac{1}{2} 3\text{ m/s}^2 \times 10\text{ s} \times t_B + \frac{1}{2} 3\text{ m/s}^2 \times 25\text{ s}^2 + \frac{1}{2} 5\text{ m/s}^2 \times t_B^2$$

$$1700\text{ m} = 87,5\text{ m} + 25 \times t_B + 4\text{ m/s}^2 \times t_B$$

$$4\text{ m/s}^2 \times t_B^2 + 25 \times t_B - 1612,5\text{ m} = 0$$

$$t_B = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 + 4 \times 4 \times 1612,5}}{8}$$

$$t_{B1} = 17,19\text{ s} \quad t_{B2} = 23,44\text{ s}$$

$$t_A = 17,19\text{ s} + 5\text{ s}$$

$$t_A = 22,19\text{ s}$$

$$\Delta r_A = 10\text{ m/s} \times 22,19\text{ s} + \frac{1}{2} 3\text{ m/s}^2 \times (22,19\text{ s})^2$$

$$\Delta r_A = 960,5\text{ m}$$

$$\Delta r_B = \frac{1}{2} 5\text{ m/s}^2 \times (17,19\text{ s})^2$$

$$\Delta r_B = 738,74\text{ m}$$

b)

5. Dos vehículos A y B se desplazan con MRUV. A se acelera a razón de 3 m/s^2 y pasa por el punto $P(3, 5)\text{ m}$ con una velocidad $(-3\vec{i} - 4\vec{j})\text{ m/s}$, en ese mismo momento B pasa por el punto $Q(-1, 3)\text{ m}$ con una velocidad de $-30\vec{j}\text{ m/s}$ y desacelera a razón de 2 m/s^2 ; determinar:

- a) La aceleración de cada uno de los vehículos
- b) La posición de A y de B después de 7s

SOLUCIÓN:

a)

$$\overrightarrow{\mu_{V_A}} = \frac{\overrightarrow{V_A}}{|\overrightarrow{V_A}|}$$

$$\overrightarrow{\mu_{V_A}} = \frac{(-3\vec{i}-4\vec{j})}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$\overrightarrow{\mu_{V_A}} = (-0,6\vec{i}-0,8\vec{j})$$

$$\overrightarrow{\mu_{V_A}} = \overrightarrow{\mu_{a_A}}$$

$$\overrightarrow{a_A} = |\overrightarrow{a_A}| \times \overrightarrow{\mu_{V_A}}$$

$$\overrightarrow{a_A} = 3\text{m/s}^2 (-0,6\vec{i}-0,8\vec{j})$$

$$\overrightarrow{a_A} = (-1,8\vec{i}-2,4\vec{j})\text{m/s}^2$$

$$\overrightarrow{a_B} = 2\vec{j}\text{m/s}^2$$

b)

$$\overrightarrow{r_{f_A}} = \overrightarrow{r_{0_A}} + \overrightarrow{V_{0_A}} t + \frac{1}{2} \overrightarrow{a_A} t^2$$

$$\overrightarrow{r_{f_A}} = (3\vec{i}+5\vec{j})\text{m} + (-3\vec{i}-4\vec{j})\text{m/s} \times 7\text{s} + \frac{1}{2} (-1,8\vec{i}-2,4\vec{j})\text{m/s}^2 \times (7\text{s})^2$$

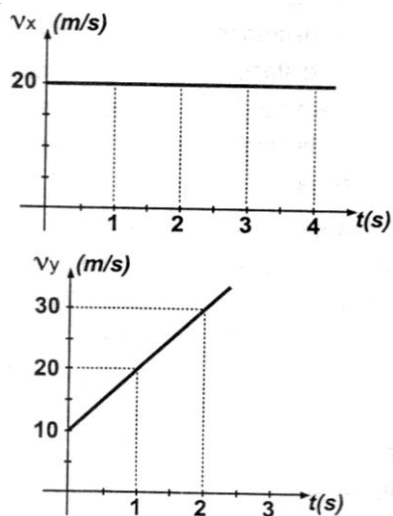
$$\overrightarrow{r_{f_A}} = (-62,1\vec{i}-81,8\vec{j})\text{m}$$

$$\overrightarrow{r_{f_B}} = \overrightarrow{r_{0_B}} + \overrightarrow{V_{0_B}} t + \frac{1}{2} \overrightarrow{a_B} t^2$$

$$\overrightarrow{r_{f_B}} = (-\vec{i}+3\vec{j})\text{m} + (-30\vec{j})\text{m/s} \times 7\text{s} + \frac{1}{2} (2\vec{j})\text{m/s}^2 \times (7\text{s})^2$$

$$\overrightarrow{r_{f_B}} = (-\vec{i}-158\vec{j})\text{m}$$

6. Una partícula se mueve de manera que su velocidad cambia con el tiempo como se indica en los gráficos siguientes:



Determinar:

- El vector velocidad para $t=0s$, $t=2s$, $t=3s$
- El vector aceleración para $t=0s$, $t=2s$, $t=3s$
- Si la partícula tiene movimiento rectilíneo

SOLUCIÓN:

a)

Para $t=0s$

Para $t=2s$

Para $t=3s$

$$\vec{V} = (20\vec{i} + 10\vec{j}) \text{ m/s}$$

$$\vec{V} = (20\vec{i} + 30\vec{j}) \text{ m/s}$$

$$\vec{V} = (20\vec{i} + 40\vec{j}) \text{ m/s}$$

b)

Para $t=0s$

Para $t=2s$

Para $t=3s$

$$\vec{a} = (0\vec{i} + 10\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = (0\vec{i} + 10\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = (0\vec{i} + 10\vec{j}) \text{ m/s}^2$$

c)

No es movimiento rectilíneo

- Una partícula se mueve a lo largo del eje X, inicia su recorrido en el punto $-8m$ desde el reposo y acelera a razón de 5 m/s^2 hasta que alcanza el punto $12m$ y entonces mantiene la velocidad alcanzada constante por $5s$ y luego desacelera hasta detenerse $5s$ mas tarde; determinar:

- a) Cuánto tiempo tuvo movimiento acelerado
- b) La distancia que recorrió con MRU
- c) El desplazamiento total y la aceleración durante los últimos 5s

SOLUCIÓN:

a)

$$\Delta r = \cancel{y_0}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$12\text{ m} - (-8\text{ m}) = \frac{1}{2}5\text{ m/s}^2 t^2$$

$$t = \sqrt{8} = 2,83$$

Sumando el tiempo de los movimientos acelerado y retardado

$$t = 7,83$$

b)

$$V_f^2 = \cancel{y_0}^2 + 2a\Delta r$$

$$\Delta r = V \times t$$

$$V_f = \sqrt{10\text{ m/s}^2 \times 20\text{ m}}$$

$$\Delta r = 14,14\text{ m/s} \times 5\text{ s}$$

$$V_f = 14,14\text{ m/s}$$

$$\Delta r = 70,70\text{ m}$$

c)

Durante los últimos 5s

Desplazamiento Total

$$\Delta r = \cancel{y_0}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\Delta r = 14,14\text{ m/s} \times 5\text{ s} + \frac{1}{2}(-2,83\text{ m/s}^2)(5\text{ s})^2$$

$$\Delta r = 20\text{ m} + 70,70\text{ m} + 35,33\text{ m}$$

$$\Delta r = 126,03\text{ m}$$

$$\Delta r = 35,33$$

d)

$$V_f = V_0 + a \Delta t$$

$$a = \frac{-V_0}{\Delta t}$$

$$a = \frac{-14,14 \text{ m/s}}{5 \text{ s}}$$

$$a = -2,83 \text{ m/s}^2$$

8. Desde la ventana de un edificio se lanzan dos piedras A y B. La piedra A se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial igual a la que B es lanzada verticalmente hacia abajo; determinar:

- a) Cuál de las dos piedras tiene mayor rapidez al llegar al suelo

SOLUCIÓN:

“La mas rápida es la piedra B pues al ir en la misma dirección de la aceleración de la gravedad su rapidez final será mayor que a la de A que debe subir hasta que su rapidez sea 0 y volver a bajar nuevamente.”

9. Dos partículas A y B se mueven con MRUV acelerado con la misma aceleración cuyo modulo es 2 m/s^2 . Si para $t=0\text{s}$ la rapidez de A es 5 m/s y la de B es $2,5 \text{ m/s}$; determinar:

- a) Cuándo A ha recorrido 100 m y cuándo B ha recorrido 50 m
b) Cuándo la relación entre la rapidez de A y la rapidez de B es $3/2$

SOLUCIÓN:

- a)

$$\Delta r = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$100 \text{ m} = 5 \text{ m/s} \times t + \frac{1}{2} 2 \text{ m/s}^2 \times t^2$$

$$t^2 + 5 \text{ m/s} \times t - 100 \text{ m} = 0$$

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \times 100}}{2}$$

$$t = 7,81 \text{ s}$$

$$\Delta r = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$50 \text{ m} = 2,5 \text{ m/s} \times t + \frac{1}{2} 2 \text{ m/s}^2 \times t^2$$

$$t^2 + 2,5 \text{ m/s} \times t - 50 \text{ m} = 0$$

$$t = \frac{-2,5 \pm \sqrt{2,5^2 + 4 \times 50}}{2}$$

$$t = 5,93 \text{ s}$$

b)

$$\frac{3}{2} = \frac{V_{0A} + at}{V_{0B} + at}$$

$$3(V_{0B} + at) = 2(V_{0A} + at)$$

$$3(2,5 \text{ m/s} + 2 \text{ m/s}^2 t) = 2(5 \text{ m/s} + 2 \text{ m/s}^2 t)$$

$$7,5 \text{ m/s} + 6 \text{ m/s}^2 t = 10 \text{ m/s} + 4 \text{ m/s}^2 t$$

$$2 \text{ m/s}^2 t = 2,5 \text{ m/s}$$

$$t = \frac{2,5 \text{ m/s}}{2 \text{ m/s}^2}$$

$$t = 1,25 \text{ s}$$

10. Un avión toma la pista con una aceleración de $-20 \vec{i} \text{ m/s}^2$ y recorre en línea recta $200 \vec{i} \text{ m}$ antes de detenerse; determinar:

- a) Con qué velocidad toca la pista
- b) Qué tiempo demora en detenerse
- c) Con qué velocidad constante un auto recorrería esa misma distancia en ese tiempo

SOLUCIÓN:

a)

$$V_f^2 = V_0^2 - 2a \Delta r$$

$$V_0 = \sqrt{2a \Delta r}$$

$$V_0 = \sqrt{2 \times 20 \text{ m/s}^2 \times 200 \text{ m}}$$

$$V_0 = 89,44 \text{ m/s}$$

b)

$$a = \frac{V_f - V_0}{t}$$

$$t = \frac{-V_0}{a}$$

$$t = \frac{-89,44 \text{ m/s}}{-20 \text{ m/s}^2}$$

$$t = 4,47 \text{ s}$$

c)

$$V = \frac{\Delta r}{t}$$

$$V = \frac{200 \text{ m}}{4,47 \text{ s}}$$

$$V = 44,74 \text{ m/s}$$

11. Un observador ve pasar por su ventana ubicada a 50m de altura un objeto hacia arriba y 3s después lo ve pasar hacia abajo; determinar:

- a) La velocidad con la que fue lanzado el objeto desde la base del edificio
- b) La altura que alcanzó respecto a la base del edificio

SOLUCIÓN:

a)

Análisis desde que es visto por la ventana:

$$t_{\text{Total}} = t_{\text{ascenso}} + t_{\text{descenso}} \quad \text{como} \quad t_{\text{ascenso}} = t_{\text{descenso}}$$

$$t_{\text{Total}} = t_{\text{ascenso}} + t_{\text{ascenso}}$$

$$2t_{\text{ascenso}} = t_{\text{Total}}$$

$$t_{\text{ascenso}} = \frac{t_{\text{Total}}}{2}$$

Análisis del ascenso:

$$V_f = V_0 + g t_{\text{ascenso}}$$

$$V_0 = -g t_{\text{ascenso}}$$

$$V_0 = -g \left(\frac{t_{\text{Total}}}{2} \right)$$

$$V_0 = -(-9,8 \text{ m/s}^2) \left(\frac{3 \text{ s}}{2} \right)$$

$$V_0 = 14,7 \text{ m/s}$$

Análisis desde la base del edificio:

La $V_0 = 14,7 \text{ m/s}$ desde la ventana pasa a ser $V_f = 14,7 \text{ m/s}$ desde la base hasta la ventana, entonces:

$$V_f^2 = V_0^2 + 2gDr$$

$$\Rightarrow V_0 = \sqrt{V_f^2 - 2gDr}$$

$$V_0 = \sqrt{V_f^2 - 2gDr}$$

$$V_0 = \sqrt{(14,7 \text{ m/s})^2 - 2(-9,8 \text{ m/s}^2)(50 \text{ m})}$$

$$\boxed{V_0 = 34,58 \text{ m/s}}$$

b)

$$V_f^2 = V_0^2 + 2g\Delta r$$

$$\Rightarrow \Delta r = \frac{V_f^2 - V_0^2}{2g}$$

$$\Delta r = \frac{-(34,58)^2}{2(-9,8 \text{ m/s}^2)}$$

$$\boxed{\Delta r = 61,0 \text{ m}}$$

12. Dos cuerpos A y B situados sobre la misma vertical distan 65m, si son lanzados uno contra otro con rapidez de 16m/s y 12 m/s respectivamente; determinar:

- a) Dónde y cuándo se chocan, si A sube y B baja
- b) Dónde y cuándo se chocan, si A baja y B sube

SOLUCIÓN:

a)

$$65\text{m} = \Delta r_A + \Delta r_B$$
$$\Rightarrow \Delta r_A = 65\text{m} - \Delta r_B \dots\dots\dots(1) \quad t_A = t_B \dots\dots\dots(2)$$

$$\Delta r_A = V_{0_A} t_A - \frac{1}{2} a_A t_A^2 \dots\dots\dots(3)$$

(1) en (3)

$$65\text{m} - \Delta r_B = V_{0_A} t_A + \frac{1}{2} g t_A^2$$
$$\Delta r_B = 65\text{m} - V_{0_A} t_A + \frac{1}{2} g t_A^2 \dots\dots\dots(4)$$

$$\Delta r_B = V_{0_B} t_B + \frac{1}{2} g t_B^2 \quad \text{como } t_A = t_B$$
$$\Delta r_B = V_{0_B} t_A + \frac{1}{2} g t_B^2 \dots\dots\dots(5)$$

Igualando (4) y (5)

$$65\text{m} - V_{0_A} t_A + \cancel{\frac{1}{2} g t_A^2} = V_{0_B} t_A + \cancel{\frac{1}{2} g t_B^2}$$

$$65\text{m} - V_{0_A} t_A = V_{0_B} t_A$$

$$t_A = \frac{65\text{m}}{V_{0_A} + V_{0_B}}$$

$$t_A = \frac{65\text{m}}{16\text{m/s} + 12\text{m/s}}$$

$$\boxed{t_A = 2,32\text{m/s}}$$

$$\Delta r_B = V_{0_B} t_A + \frac{1}{2} g t_B^2$$

$$\Delta r_B = 12\text{m/s} \times 2,32\text{s} + \frac{1}{2} (9,8\text{m/s}^2) (2,32\text{s})^2$$

$$\boxed{\Delta r_B = 54,21\text{m}}$$

$$\Delta r_A = 65\text{m} - 54,21\text{m}$$

$$\Delta r_A = 10,79\text{m}$$

b)

$$\Delta r_A = V_{0A} t_A + \frac{1}{2} g t_A^2$$

$$\Delta r_A = 16\text{m/s} \times 2,32\text{s} + \frac{1}{2} (9,8\text{m/s}^2) (2,32)^2$$

$$\Delta r_A = 63,49\text{m}$$

$$\Delta r_B = 65\text{m} - 63,49\text{m}$$

$$\Delta r_B = 1,51\text{m}$$

13. Desde un globo que se encuentra a 100m de altura, se deja caer un objeto;
determinar:

- a) Cuánto tiempo tarda el objeto en tocar el suelo si el globo está en reposo
- b) Cuánto tiempo tarda el objeto en llegar al suelo si el globo ascendía a 1m/s
- c) Cuánto tiempo tarda el objeto en llegar al suelo si el globo descendía a 1m/s

SOLUCIÓN:

a)

$$\Delta r = \cancel{V_0} t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2\Delta r}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2(100\text{m})}{9,8\text{m/s}^2}}$$

$$t = 4,52\text{s}$$

b)

$$\Delta r = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$\frac{1}{2} (9,8 \text{ m/s}^2) t^2 + (-1 \text{ m/s}) t - 100 \text{ m} = 0$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4(4,9)(100)}}{2(4,9)}$$

$$t = 4,62 \text{ s}$$

c)

$$\Delta r = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$\frac{1}{2} (9,8 \text{ m/s}^2) t^2 + (1 \text{ m/s}) t - 100 \text{ m} = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(4,9)(100)}}{2(4,9)}$$

$$t = 4,42 \text{ s}$$

14. Se deja caer una piedra desde una gran altura; determinar:

- a) El módulo del desplazamiento durante los primeros 5 segundos
- b) El módulo del desplazamiento durante los 5 segundos siguientes
- c) La rapidez alcanzada al final de cada uno de los intervalos anteriores

SOLUCIÓN:

a)

$$\Delta r = \cancel{V_{0B}} t + \frac{1}{2} g_B t_B^2$$

$$\Delta r = \frac{1}{2} (9,8 \text{ m/s}^2) (5 \text{ s})^2$$

$$\Delta r = 122,5 \text{ m}$$

b)

$$\Delta r = \cancel{V_{0B}}t + \frac{1}{2}g_B t_B^2$$

$$\Delta r = \frac{1}{2}(9,8\text{m/s})(10\text{s})^2$$

$$\Delta r = 490\text{m}$$

c)

$$V_f = \cancel{V_0} + gt$$

$$V_f = 9,8\text{m/s}^2 \times 5\text{s}$$

$$V_f = 10\text{m/s}$$

$$V_f = \cancel{V_0} + gt$$

$$V_f = 9,8\text{m/s}^2 \times 10\text{s}$$

$$V_f = 98\text{m/s}$$

15. Los móviles A y B parten por una trayectoria rectilínea desde el mismo punto y desde el reposo con una aceleración constante de $2 \vec{i} \text{ m/s}^2$ cada uno y B parte 2s más tarde; determinar:

- a) La distancia entre A y B cuándo han transcurrido 2s de haber partido A
- b) La distancia entre A y B cuándo han transcurrido 4s de haber partido A
- c) La distancia entre A y B cuándo han transcurrido 6s de haber partido A

SOLUCIÓN:

a)

$$\Delta r = \cancel{V_{0B}}t + \frac{1}{2}a_B t_B^2$$

$$\Delta r = \frac{1}{2}(2\text{m/s}^2)(2\text{s})^2$$

$$\Delta r = 4\text{m}$$

b)

$$\Delta r = \Delta r_B - \Delta r_A$$

$$\Delta r = \frac{1}{2}a_B t_B^2 - \frac{1}{2}a_A t_A^2$$

$$\Delta r = \frac{1}{2}(2\text{m/s}^2)(4\text{s})^2 - \frac{1}{2}(2\text{m/s}^2)(2\text{s})^2$$

$$\Delta r = 12\text{m}$$

c)

$$\Delta r = \Delta r_B - \Delta r_A$$

$$\Delta r = \frac{1}{2} a_B t_B^2 - \frac{1}{2} a_A t_A^2$$

$$\Delta r = \frac{1}{2} (2 \text{ m/s}^2) (6 \text{ s})^2 - \frac{1}{2} (2 \text{ m/s}^2) (4 \text{ s})^2$$

$$\Delta r = 20 \text{ m}$$

16. Una partícula con MRUV se mueve a lo largo del eje X. Cuando $t=0\text{s}$ se encuentra a 1m a la izquierda del origen, a $t=3\text{s}$ se encuentra a 15m a la derecha del origen, y a $t=5\text{s}$ se encuentra a 20m a la derecha del origen; determinar:

- La aceleración de la partícula
- El instante en que retorna al origen

SOLUCIÓN:

a)

Como en el eje X parte desde -1m hasta 15m y luego hasta 20 m

$$\begin{array}{ll} \Delta r = 15\text{m} - (-1\text{m}) & \Delta r = 20\text{m} - (-1\text{m}) \\ \Delta r = 16\text{m} & \Delta r = 21\text{m} \end{array}$$

En los dos desplazamientos la velocidad inicial es la misma entonces:

Cuando $t=3\text{s}$

Cuando $t=5\text{s}$

$$\Delta r = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\Delta r = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$16\text{m} = V_0 (3\text{s}) + \frac{1}{2} a (3\text{s})^2$$

$$21\text{m} = V_0 (5\text{s}) + \frac{1}{2} a (5\text{s})^2$$

$$16\text{m} = V_0 (3\text{s}) + a (4,5\text{s}^2)$$

$$21\text{m} = V_0 (5\text{s}) + a (12,5\text{s}^2)$$

$$V_0 = \frac{16\text{m} - a (4,5\text{s}^2)}{3\text{s}} \dots\dots\dots(1) \quad V_0 = \frac{21\text{m} - a (12,5\text{s}^2)}{5\text{s}} \dots\dots\dots(2)$$

Igualando (1) y (2)

$$\frac{16\text{m} - a(4,5\text{s}^2)}{3\text{s}} = \frac{21\text{m} - a(12,5\text{s}^2)}{5\text{s}}$$

$$80\text{ms} - a(22,5\text{s}^3) = 63\text{ms} - a(37,5\text{s}^3)$$

$$a(22,5\text{s}^3) - a(37,5\text{s}^3) = 80\text{ms} - 63\text{ms}$$

$$a = \frac{17\text{ms}}{-15\text{s}^3}$$

$$a = -1,133\text{m/s}^2$$

b)

Como el movimiento es retardado determinamos el instante en que la velocidad final sea 0

Determinando la velocidad inicial:

$$V_0 = \frac{16\text{m} - \left(-\frac{17}{15}\text{m/s}^2\right)(4,5\text{s}^2)}{3\text{s}}$$

$$V_0 = 7,033\text{m/s}$$

$$V_f = V_0 + at$$

$$t = \frac{-V_0}{a}$$

$$t = \frac{-7,033\text{m/s}}{-1,133\text{m/s}^2}$$

$$t = 6,21\text{s}$$

$$\Delta r = V_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\Delta r = (7,033\text{m/s})(6,21\text{s}) + \frac{1}{2}(-1,133\text{m/s}^2)(6,21\text{s})^2$$

$$\Delta r = 21,83\text{m}$$

Determinando el instante que llega nuevamente al origen en este caso la aceleración tiene la misma dirección que la velocidad por tanto es positiva:

$$\Delta r = V_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$21,83\text{m} = \frac{1}{2}(1,133\text{m/s}^2)t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 21,83\text{m}}{1,133\text{m/s}^2}}$$

$$t = 6,21\text{s}$$

$$t = 6,21\text{s} + 6,21\text{s}$$

$$t = 12,42\text{s}$$

17. Una partícula inicialmente en reposo en el origen de coordenadas, se mueve con una aceleración de $5\vec{i} \text{ m/s}^2$ hasta que su velocidad es de $10\vec{i} \text{ m/s}$, en ese instante se le somete a una aceleración de $-10\vec{i} \text{ m/s}^2$ hasta que la distancia total recorrida desde que partió del reposo es 30m; determinar:

- a) La velocidad media para todo el recorrido
- b) El grafico V_x contra t

SOLUCIÓN:

a)

Desde que parte del origen:

$$\begin{aligned} V_f &= \cancel{V}_0 + at & \Delta r &= \cancel{V}_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ t &= \frac{V_f}{a} & \Delta r &= \frac{1}{2}(5\text{m/s}^2)(2\text{s})^2 \\ t &= \frac{10\text{m/s}}{5\text{m/s}^2} & \Delta r &= 10\text{m} \\ t &= 2\text{s} \end{aligned}$$

Desde que se le somete la aceleración de $-10\vec{i} \text{ m/s}^2$ (MRUVR):

$$\begin{aligned} \cancel{V}_f^2 &= V_0^2 + 2a\Delta r \\ \Delta r &= \frac{-V_0^2}{2a} & \Delta r &= 10\text{m} + 5\text{m} \\ \Delta r &= \frac{(10\text{m/s})^2}{2(10\text{m/s}^2)} & \Delta r &= 15\text{m} \\ \Delta r &= 5\text{m} \end{aligned}$$

Como recorre 15 m hasta detenerse y la distancia recorrida es de 30m como la distancia recorrida es independiente del desplazamiento entonces:

$$\Delta r_{\text{Total}} = 15\text{m} - 15\text{m}$$

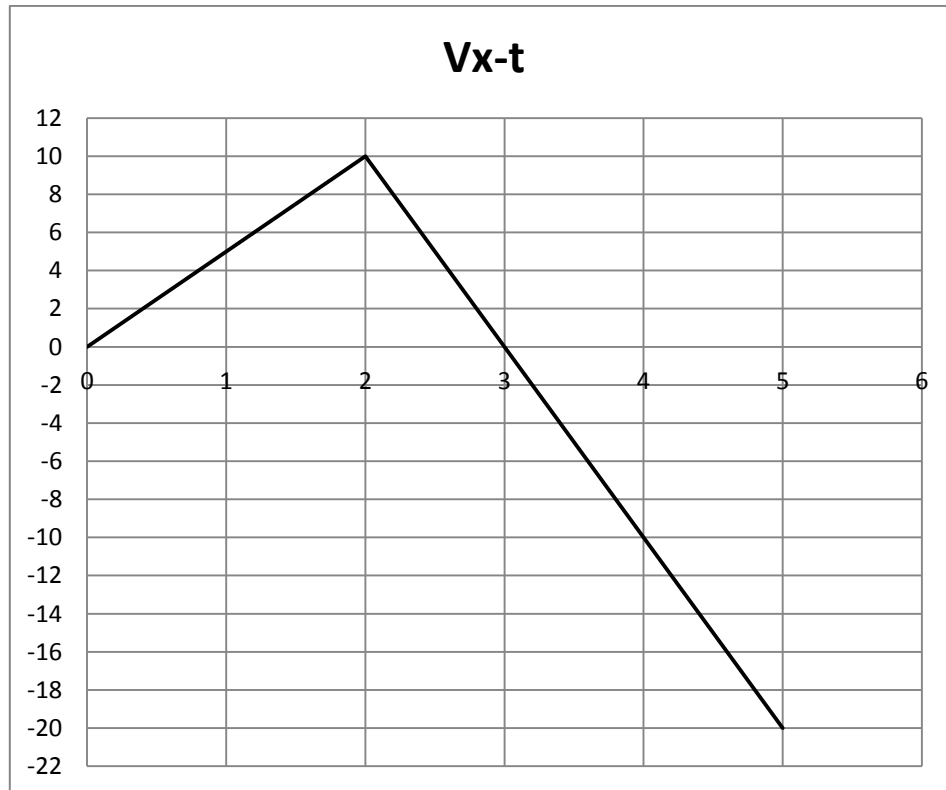
$$\Delta r_{\text{Total}} = 0$$

$$V_m = \frac{\Delta r}{t}$$

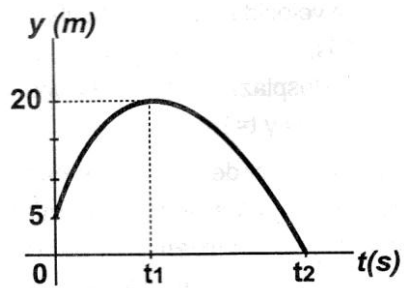
$$V_m = \frac{0}{t}$$

$$V_m = 0$$

b)



18. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba, su posición cambia con el tiempo como indica la figura, siendo el nivel de referencia el suelo



Determinar:

- a) Los valores de t_1 y t_2
 b) La velocidad con la que llega al suelo

SOLUCIÓN:

a)

$$\Delta r = V_0 t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2$$

$$V_f^2 = V_0^2 - 2g \Delta r$$

$$V_0 = \sqrt{2a \Delta r}$$

$$V_0 = \sqrt{2(9,8 \text{ m/s}^2)(15 \text{ m})}$$

$$V_0 = \sqrt{294} = 17,15 \text{ m/s}$$

$$15 \text{ m} = \sqrt{294} \text{ m/s} t_1 - \frac{1}{2} (9,8 \text{ m/s}^2) t_1^2$$

$$4,9 t_1^2 - \sqrt{294} \text{ m/s} t_1 + 15 \text{ m} = 0$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{294} \pm \sqrt{(\sqrt{294})^2 - 4(4,9)(15)}}{2(4,9)}$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{294}}{9,8} \text{ s} = 1,75 \text{ s}$$

$$\Delta r = \cancel{V_0} t_1 - \frac{1}{2} a t_1^2$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(\Delta r)}{-g}}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(20 \text{ m})}{-(-9,8 \text{ m/s}^2)}}$$

$$t_2 = 2,02 \text{ s}$$

b)

$$V_f^2 = \cancel{V_0}^2 + 2g \Delta r$$

$$V_f = \sqrt{2g \Delta r}$$

$$V_f = \sqrt{2(9,8 \text{ m/s}^2)(20 \text{ m})}$$

$$V_f = 19,80 \text{ m/s}$$

19. Dos autos A y B se desplazan por la misma trayectoria rectilínea. A se mueve con una velocidad constante de $-8 \vec{i} \text{ m/s}$ y parte de la posición $-7 \vec{i} \text{ m}$. B inicia en el

punto $-5\vec{i}$ m con una velocidad de $8\vec{i}$ m/s y al tiempo $t=4$ s su velocidad es $-8\vec{i}$ m/s. Si se mueve con aceleración constante; determinar:

- a) La aceleración de B
- b) En qué instante coinciden las posiciones de A y B

SOLUCIÓN:

20. Una partícula se mueve con MRUVA de modo que la magnitud de su desplazamiento de 0 a 2s es 40m y de 2 a 4s es 65m; determinar:

- a) La magnitud de la aceleración
- b) El módulo del desplazamiento entre 0 y 10s

SOLUCIÓN:

21. Dos partículas A y B se mueven sobre carreteras rectas. A se mueve con aceleración constante de modo que en $t_0 = 0$ s, $\vec{r}_0 = -300\vec{i}$ m y $\vec{v}_0 = 30\vec{i}$ m/s y en $t_1 = 10$ s, $\vec{r}_1 = 10\vec{i}$ m, B se mueve con velocidad constante de modo que en $t_0 = 0$ s, $\vec{r}_0 = 200\vec{j}$ m y en $t_1 = 10$ s, $\vec{r}_1 = 300\vec{i}$ m; determinar:

- a) La velocidad de A en $t_1 = 10$ s
- b) La velocidad de A respecto a B en $t_1 = 10$ s

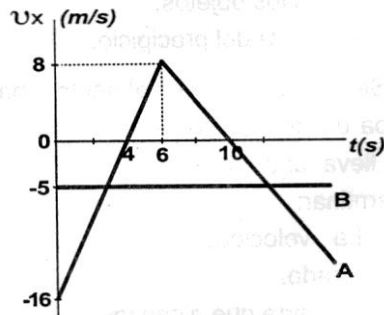
SOLUCIÓN:

22. Se deja caer libremente un objeto desde una altura de 120m medida desde el suelo, en ese mismo instante se arroja hacia abajo un segundo objeto desde una altura de 190m; determinar:

- a) La velocidad inicial del segundo objeto para que los dos lleguen al piso al mismo tiempo

SOLUCIÓN:

23. Dos móviles A y B se mueven de acuerdo al siguiente grafico:



Si parten del origen; determinar:

- La posición de cada móvil para $t=10$ s
- La posición y el tiempo en que los dos móviles se encuentran por primera vez luego de partir

SOLUCIÓN:

24. Un automóvil viaja a 18m/s y un bus a 12m/s sobre una carretera recta en direcciones contrarias. De manera simultanea los choferes se ven y frenan de inmediato, el auto disminuye su rapidez a razón de 2m/s^2 y el bus a 3m/s^2 ; determinar:

- La distancia mínima entre los dos al momento que frenan para evitar que colisionen

SOLUCIÓN:

25. Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba con una cierta rapidez inicial desde el borde de un precipicio y en 9s llega al fondo. Luego desde el mismo lugar se lanza otro objeto verticalmente hacia abajo con la misma rapidez inicial y tarda 2s en llegar al fondo; determinar:

- La rapidez inicial con la que fueron lanzados los objetos
- La altura del precipicio

SOLUCIÓN:

26. Se dispara verticalmente hacia arriba un móvil y cuando ha ascendido 5m lleva una velocidad de $10\vec{j}$ m/s ; determinar:

- a) La velocidad con la que fue disparado
- b) La altura que alcanza
- c) El tiempo que demora en ascender esos 5m y el que demora en pasar nuevamente por dicha posición

SOLUCIÓN:

27. Una partícula se mueve a lo largo del eje X, a $t=2s$, su velocidad es $16\vec{i}$ m/s y su aceleración es constante e igual a $-2\vec{i}$ m/s²; determinar:

- a) La velocidad de la partícula a $t=5s$ y $t=15s$
- b) El desplazamiento de la partícula entre $t=5s$ y $t=15s$

SOLUCIÓN:

28. En el interior de un tren que parte del reposo y acelera a razón de $4\vec{i}$ m/s², un objeto desliza sin rozamiento por el piso del vagón con una velocidad de $8\vec{i}$ m/s respecto a tierra; determinar:

- a) El tiempo que debe transcurrir para que el objeto alcance nuevamente su posición original
- b) En ese mismo momento la velocidad instantánea del vagón respecto a tierra
- c) En ese instante, la velocidad del objeto respecto a la velocidad del vagón

SOLUCIÓN:

29. Un cohete es lanzado verticalmente hacia arriba, desde el reposo, con una aceleración constante de $14,7\vec{i}$ m/s² durante 8s, en ese momento se le acaba el combustible y el cohete continua moviéndose de manera que únicamente queda sujeta a la gravedad de la tierra; determinar:

- a) La altura máxima que alcanza el cohete
- b) El tiempo que tarde en regresar a la tierra
- c) El grafico velocidad-tiempo para este movimiento

SOLUCIÓN:

EJERCICIO N° 9

1. Desde un puente se dispara un proyectil con una velocidad de $30\vec{i}$ m/s, si impacta en la superficie del río con un ángulo de 45° ; determinar:
 - a) En cuánto tiempo impacta el proyectil
 - b) La altura del puente respecto a la superficie del río
 - c) La aceleración tangencial y centrípeta al momento del impacto

SOLUCIÓN:

2. Un bombardero que vuela horizontalmente con una velocidad de $480\vec{i}$ km/h, a una altura de 5500m dispara a un auto que se mueve a una velocidad constante de $125\vec{i}$ km/h, en el mismo plano vertical. Para que el proyectil impacte en el blanco; determinar:
 - a) El ángulo que forma la visual del avión al auto con la horizontal en el instante en que el avión debe soltar la bomba
 - b) El tiempo que tarda la bomba en impactar el auto
 - c) La distancia que recorre el avión desde que suelta la bomba hasta que impacta en el blanco

SOLUCIÓN:

3. Se lanza una pelota desde una altura de 5m con una velocidad de $12\vec{i}$ m/s ; determinar:

- a) La distancia a la que debe colocarse una persona que alzando los brazos alcanza 2,20m de altura, para cogerla
- b) El tiempo que la pelota permanece en el aire
- c) Las aceleraciones tangencial y centrípeta en el momento que la persona recepta

SOLUCIÓN:

4. Desde lo alto de un edificio se lanza un objeto con una velocidad de $100 \vec{i} \text{ m/s}$; determinar:
- a) En qué tiempo el módulo de la aceleración tangencial es igual al módulo de la aceleración centrípeta
 - b) La velocidad en ese instante
 - c) La posición en ese instante respecto al punto de lanzamiento

SOLUCIÓN:

5. En una mesa de 0,75m de altura un objeto desliza y cae describiendo una trayectoria semiparabólica. Sabiendo que cuando se encuentra a 0,15m de altura, la distancia hasta el borde de la mesa es 80cm; determinar:
- a) La velocidad con la que el objeto abandona la mesa
 - b) El tiempo en el que llega a la posición indicada y el tiempo en que impacta en el suelo
 - c) La velocidad en la posición indicada y la velocidad con que choca contra el suelo

SOLUCIÓN:

6. Una pelota de tenis se impulsa con una raqueta de tal modo que su velocidad inicial es $56 \vec{i} \text{ km/h}$ desde el borde de una cancha que mide 23,77m de largo y desde una altura de 2,5m; determinar:
- a) La distancia a la que rebota por primera vez respecto a la red central cuya altura es de 0,92m
 - b) La velocidad mínima que se le debe comunicar a la pelota para que justamente logre pasar la red

- c) La velocidad que se le debe comunicar a la pelota para que caiga justamente al borde opuesto de la cancha

SOLUCIÓN:

7. Un proyectil es disparado con una rapidez de 45m/s y un ángulo de 40° sobre la horizontal; determinar:

- a) La velocidad del proyectil cuando forma un ángulo de 30° sobre la horizontal
- b) El desplazamiento cuando alcanza dicho punto
- c) La altura máxima que alcanza
- d) El alcance horizontal

SOLUCIÓN:

8. Se impulsa una pelota desde el suelo con una rapidez de 50m/s y con un ángulo de 45° desde la horizontal; determinar:

- a) La velocidad de la pelota cuando su componente en el eje y es de $-20 \vec{j} \text{ m/s}$
- b) La posición de la pelota cuando dicha alcanza velocidad
- c) La aceleración total, tangencial y centrípeta en dicho instante
- d) La altura máxima

SOLUCIÓN:

9. Un avión que lleva una velocidad de $50 \vec{i} + 60 \vec{j} \text{ m/s}$ deja caer una bomba; determinar:

- a) La altura máxima que alcanza la bomba desde el nivel de lanzamiento
- b) El tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima
- c) La altura por debajo del nivel de lanzamiento a la que la bomba tiene una velocidad de $50 \vec{i} - 100 \vec{j} \text{ m/s}$

SOLUCIÓN:

10. Un proyectil es lanzado desde una altura de 80m desde el suelo formando un ángulo de 40° sobre la horizontal, si cae al suelo a una distancia horizontal de 300m desde el punto de lanzamiento; determinar:

- a) La velocidad inicial del proyectil
- b) La posición del proyectil en el punto mas alto respecto al punto de lanzamiento
- c) El tiempo que demora en llegar al suelo

SOLUCIÓN:

11. De un cañón se dispara un proyectil con una rapidez de 200m/s y un ángulo de 50° y luego se dispara otro con la misma rapidez y un ángulo de 30° sobre la horizontal; determinar:

- a) El intervalo de tiempo con que deben realizarse los disparos para que los proyectiles choquen
- b) La altura máxima que alcanza cada proyectil respecto al cañón
- c) El alcance horizontal de cada proyectil
- d) Dónde chocan los proyectiles respecto al cañón

SOLUCIÓN:

12. Un proyectil con movimiento parabólico se encuentra en el punto A, donde su velocidad instantánea es de 20m/s y forma un ángulo de 30° sobre la horizontal. Si el proyectil demoró 1,2s en llegar a A desde su lanzamiento; determinar:

- a) La velocidad inicial del lanzamiento
- b) La altura máxima
- c) Las aceleraciones: total, tangencial y centrípeta en el punto A
- d) El ángulo de lanzamiento

SOLUCIÓN:

13. Un proyectil es disparado con una rapidez de 100m/s y con un ángulo de 60° sobre la horizontal desde un punto A(-10, -2)m; determinar:

- a) La velocidad en el instante en que $X=0$ m

- b) La aceleración tangencial en $Y=0\text{m}$ por primera vez
- c) Las coordenadas del punto donde la altura es máxima
- d) La coordenada en Y cuando $X=2\text{m}$

SOLUCIÓN:

14. Desde lo alto de un edificio de 20m de altura se lanza una pelota con una velocidad de 5m/s y un ángulo de 45° sobre la horizontal; determinar:

- a) A que distancia horizontal de la base del edificio impacta la pelota
- b) La altura máxima que alcanza
- c) A que distancia horizontal de la base del edificio alcanza la altura máxima
- d) La velocidad con la que llega al suelo

SOLUCIÓN:

15. Una persona con patines sube por una rampa de 20° , cuando abandona la rampa, salta hasta una grada situada a 2m de distancia horizontal y $0,5\text{m}$ abajo del punto donde abandona la rampa; determinar:

- a) La velocidad mínima con la que debe abandonar la rampa para llegar justamente a la grada sin problema
- b) La máxima altura que alcanza desde el punto donde abandona la rampa
- c) Si con la misma rapidez calculada en el punto a) abandona una rampa de 15° , ¿Logra alcanzar la grada sin problema?

SOLUCIÓN:

16. Una pelota es lanzada a 20m/s formando un ángulo de 60° con la horizontal; a 10m del punto de lanzamiento se encuentra un obstáculo de 14m de altura; determinar:

- a) Si la pelota supera el obstáculo; si no lo hace a que altura del mismo impacta
- b) La máxima altura que alcanza
- c) En qué puntos podrían colocarse dos vallas de 10m de altura, para que la pelota los pase exactamente

SOLUCIÓN:

17. Se lanza un balón de manera que pasa exactamente sobre dos barreras cada una de 2m de altura que están separadas 10m. Si el tiempo que demora el balón en recorrer la distancia entre las barreras es 1s; determinar:

- a) La velocidad inicial con que fue lanzado el balón
- b) La altura máxima
- c) El alcance horizontal
- d) El tiempo total desde que es lanzado hasta que llega nuevamente al nivel del lanzamiento

SOLUCIÓN:

18. Se dispara una flecha a 20m/s y 30° sobre la horizontal, para dar en un árbol que se encuentra a 25m de distancia; determinar;

- a) La altura a la que se elevará la flecha
- b) En ángulo que formarán la flecha con el árbol
- c) El tiempo que tarda la flecha hasta dar en el árbol

SOLUCIÓN:

19. Desde la base de una montaña cuya pendiente es 35° se lanza hacia la cima una piedra a 30m/s y 60° sobre la horizontal; determinar:

- a) La altura a la que impacta la piedra (desde la base de la montaña)
- b) El tiempo que tarda en impactar
- c) Si el impacto sucede antes o después de que la piedra alcanzado su altura máxima
- d) La velocidad con la que impacta la piedra

SOLUCIÓN:

20. Desde una cancha de fútbol ubicada al pie de una colina de 30° de pendiente, se realiza un lanzamiento desde un punto ubicado a 10m de la base de la colina y hacia ella; determinar:

- a) La velocidad inicial con que se debe lanzar la pelota para que impacte en la colina a una altura de 3m justo cuando llega a su altura máxima
- b) Dónde y cuándo impacta la pelota si la velocidad inicial es 10m/s y 30° sobre la horizontal
- c) Dónde y cuándo impacta la pelota si la velocidad inicial es 15m/s y 30° sobre la horizontal

SOLUCIÓN:

EJERCICIO N°10

1. Una partícula animada de movimiento circular parte del punto (3, 5)cm y gira antihorariamente, con centro en el origen, 1000° en 12s. Determinar:
 - a) El desplazamiento angular
 - b) La velocidad angular media
 - c) La posición angular inicial
 - d) La posición final

SOLUCIÓN:

a)

$$\frac{1000^\circ}{1} \left| \frac{\pi}{180^\circ} \right| = 17,45 \text{ rad}$$

b)

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

$$\omega = \frac{17,45 \text{ rad}}{12 \text{ s}}$$

$$\omega = 1,45 \text{ rad/s}$$

c)

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{5}{3} \right)$$

$$\theta = 59,04^\circ$$

$$\frac{59,04^\circ}{180^\circ} \left| \frac{\pi}{1} \right| = 1,03 \text{ rad}$$

d)

$$\theta_f = \Delta\theta + \theta_0$$

$$\theta_f = 17,45 \text{ rad} + 1,03 \text{ rad}$$

$$\theta_f = 18,48 \text{ rad}$$

2. Calcular la velocidad angular de cada una de las tres manecillas de un reloj

SOLUCIÓN:

Segundero

Minutero

Horero

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}}$$

$$\omega = 0,105 \text{ rad/s}$$

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{3600 \text{ s}}$$

$$\omega = 1,745 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$$

$$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{43200 \text{ s}}$$

$$\omega = 1,454 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$$

3. El radio de una rueda de bicicleta gira con una velocidad angular de 0,7 rad/s durante 4 minutos. Determinar:

- a) En ángulo descrito en grados
b) Cuantas vueltas ha dado

SOLUCIÓN:

a)

$$\Delta\theta = \omega \times \Delta t$$

$$\Delta\theta = 0,7 \text{ rad/s} \times 240 \text{ s}$$

$$\Delta\theta = 168 \text{ rad}$$

$$\frac{168 \text{ rad}}{1} \left| \frac{180^\circ}{\pi} \right| = 9625,69^\circ$$

b)

$$v_{\text{ueltas}} = \frac{168 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}}$$

$$v_{\text{ueltas}} = 26,74$$

4. Una partícula gira por una trayectoria circular con una velocidad angular constante de 8 rad/s. Determinar:

- a) El tiempo necesario para girar un ángulo de 1000°
- b) El tiempo necesario para dar una revolución
- c) El ángulo girado en un minuto
- d) El número de revoluciones que da por minuto

SOLUCIÓN:

a)

$$\frac{1000^\circ}{180^\circ} \left| \frac{\pi}{180^\circ} \right| = 17,45 \text{ rad}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta \theta}{\omega}$$

$$\Delta t = \frac{17,45 \text{ rad}}{8 \text{ rad/s}}$$

$$\Delta t = 2,18 \text{ s}$$

b)

$$\Delta t = \frac{\Delta \theta}{\omega}$$

$$\Delta t = \frac{2\pi \text{ rad}}{8 \text{ rad/s}}$$

$$\Delta t = 0,79 \text{ s}$$

c)

$$\Delta \theta = \omega \times \Delta t$$

$$\Delta \theta = 8 \text{ rad/s} \times 60 \text{ s}$$

$$\Delta \theta = 480 \text{ rad}$$

d)

$$\frac{8 \text{ rad}}{\text{s}} \left| \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} \right| \left| \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \right| = 76,39 \text{ RPM}$$

5. Una partícula que gira por una trayectoria circular da 25 vueltas en 6s. Determinar:

- a) La velocidad angular media
- b) El ángulo girado en 3s
- c) El tiempo necesario para girar un ángulo de 1600°

SOLUCIÓN:

a)

$$\frac{25 \text{ vueltas}}{6 \text{ s}} \left| \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ vuelta}} \right| = 50\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

$$\omega = \frac{50\pi \text{ rad}}{6 \text{ s}}$$

$$\omega = 26,18 \text{ rad/s}$$

b)

$$\Delta \theta = \omega \times \Delta t$$

$$\Delta \theta = 26,18 \text{ rad/s} \times 3 \text{ s}$$

$$\Delta \theta = 78,54 \text{ rad}$$

c)

$$\frac{1600^\circ}{1} \left| \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \right| = 27,93 \text{ rad}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta \theta}{\omega}$$

$$\Delta t = \frac{27,93 \text{ rad}}{26,18 \text{ rad/s}}$$

$$\Delta t = 1,07 \text{ s}$$

6. Una partícula parte del punto $(-5, -6)$ cm y gira en sentido antihorario con una velocidad angular constante de 18 rad/s. Si el centro de la trayectoria es el origen, determinar:

- a) La posición angular inicial
- b) El desplazamiento angular en 4s
- c) La posición angular final
- d) La posición final

SOLUCIÓN:

a)

$$\theta = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{6}{5}\right) \quad \frac{129,80^\circ}{180^\circ} \left| \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \right| = 2,27 \text{ rad}$$

$$\theta = 129,80^\circ$$

b)

$$\Delta\theta = \omega \times \Delta t$$

$$\Delta\theta = 18 \text{ rad/s} \times 4 \text{ s}$$

$$\Delta\theta = 72 \text{ rad}$$

c)

$$\theta_f = \Delta\theta + \theta_0$$

$$\theta_f = 72 \text{ rad} + 2,27 \text{ rad}$$

$$\theta_f = 74,27 \text{ rad}$$

$$\frac{74,27 \text{ rad}}{\pi \text{ rad}} \left| \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} \right| = 4255,36^\circ$$

d)

$$\sqrt{5^2 + 6^2}$$

$$7,81 \text{ cm}$$

$$r_{0x} = 7,81 \text{ cm} \cos 4255,36^\circ$$

$$r_{0x} = 3,35 \text{ cm}$$

$$r_{0y} = 7,81 \text{ cm} \sin 4255,36^\circ$$

$$r_{0y} = -7,06 \text{ cm}$$

$$\vec{r}_0 = (3,35 \vec{i} - 7,06 \vec{j}) \text{ cm}$$

7. La velocidad angular de un motor cambia uniformemente de 1200 a 2100 RPM en 5s. Determinar:

- a) La aceleración angular
- b) La velocidad angular media
- c) El desplazamiento angular

SOLUCIÓN:

a)

$$\frac{1200 \text{ rev}}{\text{min}} \left| \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \right| \left| \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right| = 125,66 \text{ rad/s} \quad \frac{2100 \text{ rev}}{\text{min}} \left| \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \right| \left| \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right| = 219,91 \text{ rad/s}$$

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{219,91 \text{ rad/s} - 125,66 \text{ rad/s}}{5 \text{ s}}$$

$$\alpha = 18,85 \text{ rad/s}^2$$

b)

$$\omega = \frac{\omega_f + \omega_0}{2}$$

$$\omega = \frac{125,66 \text{ rad/s} + 219,91 \text{ rad/s}}{2}$$

$$\omega = 172,79 \text{ rad/s}$$

c)

$$\Delta\theta = \omega \times \Delta t$$

$$\Delta\theta = 172,79 \text{ rad/s} \times 5 \text{ s}$$

$$\Delta\theta = 863,95 \text{ rad}$$

8. Un cuerpo parte del punto (4, 7) cm en sentido antihorario por una trayectoria circular y gira un ángulo de 120 rads en 8 seg, alcanzando una velocidad angular de 25 rad/s. Si el centro de la trayectoria es el origen, determinar:

- a) La velocidad angular media

- b) La velocidad angular inicial
- c) La posición angular final
- d) La aceleración angular

SOLUCIÓN:

a)

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

$$\omega = \frac{120 \text{ rad}}{8 \text{ s}}$$

$$\omega = 15 \text{ rad/s}$$

b)

$$\omega = \frac{\omega_f + \omega_0}{2}$$

$$15 \text{ rad/s} = \frac{25 \text{ rad/s} + \theta_0}{2}$$

$$\theta_0 + 25 \text{ rad/s} = 30 \text{ rad/s}$$

$$\theta_0 = 30 \text{ rad/s} - 25 \text{ rad/s}$$

$$\theta_0 = 5 \text{ rad/s}$$

c)

$$\theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)$$

$$\theta_0 = 60,26^\circ$$

$$\frac{60,26^\circ}{180^\circ} \left| \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \right| = 1,05 \text{ rad}$$

$$\theta_f = \Delta \theta + \theta_0$$

$$\theta_f = 120 \text{ rad} + 1,05 \text{ rad}$$

$$\theta_f = 121,05 \text{ rad}$$

d)

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{25 \text{ rad/s} - 5 \text{ rad/s}}{8 \text{ s}}$$

$$\alpha = 2,5 \text{ rad/s}^2$$

9. Un cuerpo parte del punto (3, -6)cm en sentido antihorario por una pista circular con centro en el origen, con una velocidad angular de 6rad/s y se mueve durante 10s con una aceleración angular de 2 rad/s^2 ; Determinar:

- a) La velocidad angular final
- b) La velocidad angular media
- c) El desplazamiento angular
- d) La posición final

SOLUCIÓN:

a)

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t}$$

$$\omega_f = \alpha \times t + \omega_0$$

$$\omega_f = 2 \text{ rad/s}^2 \times 10 \text{ s} + 6 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = 26 \text{ rad/s}$$

b)

$$\omega = \frac{\omega_f + \omega_0}{2}$$

$$\omega = \frac{26 \text{ rad/s} + 6 \text{ rad/s}}{2}$$

$$\omega = 16 \text{ rad/s}$$

c)

$$\Delta\theta = \omega \times \Delta t$$

$$\Delta\theta = 16 \text{ rad/s} \times 10 \text{ s}$$

$$\Delta\theta = 160 \text{ rad}$$

d)

$$\frac{160 \text{ rad}}{\pi \text{ rad}} \left| \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} \right| = 9167,32^\circ$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-6}{3} \right)$$

$$\theta = -63,43^\circ$$

$$\theta_f = 9167,32^\circ - 63,43^\circ$$

$$\theta_f = 9103,89^\circ$$

$$\sqrt{3^2 + 6^2} = 6,71\text{m}$$

$$r_f x = 6,71 \cos 9103,89^\circ$$

$$r_f y = 6,71 \sin 9103,89^\circ$$

$$r_f x = -1,61\text{m}$$

$$r_f y = 6,51\text{m}$$

$$r_f = (-1,61\vec{i} + 6,51\vec{j})\text{m}$$

10. Desde un mismo punto de la circunferencia parten dos móviles en sentido opuesto.
El primero recorre la circunferencia en 1h45min y el segundo recorre un ángulo de $10^\circ 30'$ en un minuto
Determinar dónde y cuándo se encuentran

SOLUCIÓN:

$$1\text{h} : 45\text{min} = 6300\text{s}$$

$$10^\circ 31' = 10,52^\circ$$

$$1\text{min} = 60\text{s}$$

$$\frac{10,52^\circ}{180^\circ} \left| \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \right| = 0,184 \text{ rad}$$

$$\omega_1 = \frac{\Delta\theta_1}{\Delta t_1}$$

$$\omega_2 = \frac{\Delta\theta_2}{\Delta t_2}$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi \text{ rad}}{6300\text{s}}$$

$$\omega_2 = \frac{0,184 \text{ rad}}{60\text{s}}$$

$$\omega_1 = 9,97 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 3,07 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$$

Para determinar el encuentro:

$$\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 = 2\pi \text{ rad} \dots\dots\dots(1) \quad \Delta\theta = \omega \times \Delta t \dots\dots\dots(2) \quad \Delta t_1 = \Delta t_2 \dots\dots\dots(3)$$

(2) y (3) en (1)

$$\omega_1 \times \Delta t + \omega_2 \times \Delta t = 2\pi \text{ rad}$$

$$\Delta t (\omega_1 + \omega_2) = 2\pi \text{ rad}$$

$$\Delta t = \frac{2\pi \text{ rad}}{\omega_1 + \omega_2}$$

$$\Delta t = \frac{2\pi \text{ rad}}{9,97 \times 10^{-4} \text{ rad/s} + 3,07 \times 10^{-3} \text{ rad/s}}$$

$$\Delta t = 1544,92 \text{ s}$$

$$\Delta \theta_1 = \omega_1 \times \Delta t$$

$$\Delta \theta_1 = 9,97 \times 10^{-4} \text{ rad/s} \times 1544,92 \text{ s}$$

$$\Delta \theta_1 = 1,54 \text{ rad}$$

$$\Delta \theta_2 = \omega_2 \times \Delta t$$

$$\Delta \theta_2 = 3,07 \times 10^{-3} \text{ rad/s} \times 1544,92 \text{ s}$$

$$\Delta \theta_2 = 4,74 \text{ rad}$$

EJERCICIO N°11

1. Un volante cuyo diámetro es de 1,5m está girando a 200RPM, determinar:

- a) La velocidad angular
- b) El periodo
- c) La frecuencia
- d) La rapidez de un punto del borde
- e) El módulo de la aceleración centrípeta

SOLUCIÓN:

2. Un cuerpo que gira con MCU está provisto de una velocidad angular de 2rad/s. Determinar:

- a) El ángulo girado en 4s
- b) El número de vueltas que da en 4s
- c) El tiempo necesario para girar un ángulo de 500°
- d) El periodo
- e) La frecuencia

SOLUCIÓN:

3. Las manecillas de un reloj miden: el horero=4cm, minuterio =7cm y segundero=10cm. Para cada una, determinar:

- a) El periodo
- b) La frecuencia
- c) La velocidad angular
- d) La rapidez del extremo
- e) El módulo de la aceleración centrípeta del extremo

SOLUCIÓN:

4. Un cuerpo gira en una trayectoria circular de 70 cm de radio y da 750 rev cada 2,5 minutos. Determinar:

- a) La velocidad angular
- b) La distancia recorrida
- c) La rapidez del cuerpo
- d) El módulo de la aceleración centrípeta

SOLUCIÓN:

5. Un móvil se mueve en una circunferencia de 1,2m de radio con una velocidad angular constante de 22 rad/s durante 6s. Determinar:

- a) El desplazamiento angular
- b) La distancia recorrida
- c) El periodo
- d) La rapidez del móvil
- e) El modulo de la aceleración centrípeta

SOLUCIÓN:

6. Una rueda de bicicleta tiene 60cm de diámetro y recorre una distancia de 12m en 15s. Determinar:

- a) El ángulo girado
- b) El número de vueltas que dio
- c) La velocidad angular
- d) El periodo
- e) El módulo de la aceleración centrípeta

SOLUCIÓN:

7. La tierra cuyo radio aproximado tiene 6375km, gira sobre su propio eje (rotación). Determinar:

- a) El periodo de rotación
- b) La frecuencia
- c) La velocidad angular
- d) La rapidez de un punto del ecuador en km/h
- e) El módulo de la aceleración centrípeta

SOLUCIÓN:

8. El radio de la orbita seguida por la tierra en su movimiento alrededor del sol (traslación), mide $1,49 \times 10^{11}$ m . Determinar:

- a) El periodo de revolución
- b) La frecuencia
- c) La velocidad angular
- d) La rapidez en km/h
- e) El módulo de la aceleración centrípeta

SOLUCIÓN:

9. La luna orbita alrededor de nuestro planeta; la distancia promedio que la separa de la tierra es de $3,84 \times 10^8$ m . Determinar:

- a) El periodo de revolución
- b) La frecuencia
- c) La velocidad angular
- d) La rapidez en km/h
- e) El módulo de la aceleración centrípeta

SOLUCIÓN:

10. El Sol efectúa un movimiento de traslación de la Vía Láctea; el radio de la órbita es $2,4 \times 10^{20}$ m y su periodo de revolución es de $6,3 \times 10^{15}$ s. Determinar:

- a) La frecuencia
- b) La distancia recorrida en 50 años
- c) La velocidad angular
- d) La rapidez en km/h
- e) El módulo de la aceleración centrípeta

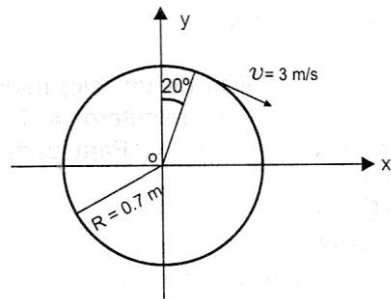
SOLUCIÓN:

11. Una partícula animada de MCU parte del punto $(2, 7)$ m y gira alrededor del origen en sentido antihorario describiendo un ángulo de 215° en 6s. Determinar:

- a) La velocidad angular
- b) La posición angular inicial
- c) La posición angular final
- d) La posición final
- e) El periodo
- f) La frecuencia
- g) La velocidad en la posición final
- h) La aceleración centrípeta en la posición inicial

SOLUCIÓN:

12. Un cuerpo animado de MCU se encuentra en la posición indicada en la figura en $t=2\text{s}$. Si se mueve en sentido horario 6s, determinar:



- a) La velocidad angular
- b) El desplazamiento angular
- c) Cuántas vueltas da
- d) La distancia recorrida
- e) La posición final
- f) El periodo
- g) La velocidad en $t=2\text{s}$
- h) La aceleración centrípeta en $t=8\text{s}$

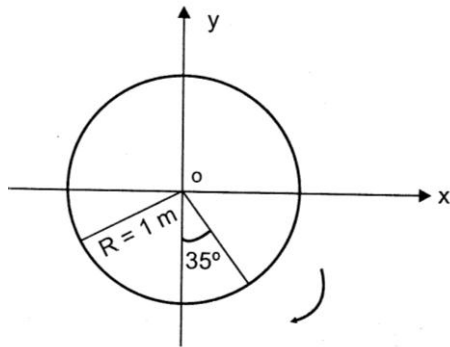
SOLUCIÓN:

13. Un cuerpo parte del punto $(4, -3)\text{m}$ en sentido antihorario por una trayectoria circular con centro en el origen y se mueve 12s con una velocidad angular constante de 3rad/s . Determinar:

- a) El desplazamiento angular
- b) La posición angular inicial
- c) La posición angular final
- d) La posición final
- e) Cuántas vueltas da
- f) El periodo
- g) La velocidad en la posición inicial
- h) La aceleración centrípeta en la posición final

SOLUCIÓN:

14. Una partícula animada de MCU se encuentra en la posición que indica la figura en $t=4s$. Si gira en sentido horario con una velocidad angular de 5rad/s durante $10s$, determinar:



- a) El desplazamiento angular
- b) La posición angular inicial
- c) La posición angular final
- d) La posición final
- e) Cuántas vueltas da
- f) El periodo
- g) La velocidad en $t=14s$
- h) La aceleración centrípeta en $t=4s$

SOLUCIÓN:

15. Una partícula parte del punto $(-4, 1)\text{m}$ en sentido horario con MCU. Si gira con una rapidez de 2m/s durante $15s$. Determinar:

- a) El desplazamiento angular
- b) El periodo
- c) La posición angular inicial
- d) La posición angular final
- e) La posición final
- f) Cuántas vueltas da
- g) La velocidad en la posición inicial
- h) La aceleración centrípeta en la posición final

SOLUCIÓN:

EJERCICIO N°12

1. Un automóvil parte del reposo en una vía circular de 400m de radio con MCUV hasta que alcanza una rapidez de 72km/h en un tiempo de 50s. Determinar:
 - a) La velocidad angular final
 - b) La velocidad angular media
 - c) La aceleración angular
 - d) El desplazamiento angular
 - e) La distancia recorrida
 - f) El tiempo que tarda en dar 100 vueltas
 - g) El módulo de la aceleración total final

SOLUCIÓN:

2. Una turbina de un jet se acelera de 0 a 6000 RPM en 20s. Si el radio de la turbina es 1,2m, determinar:
 - a) La velocidad angular final
 - b) La velocidad angular media
 - c) La aceleración angular
 - d) La rapidez media
 - e) El desplazamiento angular
 - f) La distancia recorrida por el extremo de la turbina
 - g) El módulo de la aceleración total final

SOLUCIÓN:

3. Un punto animado de movimiento circular cambia su velocidad angular de 200 RPM a 2600 RPM en 2 min. Si el radio de la trayectoria es 1,5 m, determinar:
 - a) La rapidez inicial

- b) La velocidad angular final
- c) La aceleración angular
- d) El desplazamiento angular
- e) Cuántas vueltas dio
- f) La distancia recorrida
- g) El módulo de la aceleración total inicial

SOLUCIÓN:

4. Un cuerpo describe una trayectoria circular de 1m de radio con una aceleración angular de $1,3 \text{ rad/s}^2$. Cuando ha girado un ángulo de $7\pi/3 \text{ rad}$ alcanza una velocidad angular de 42 RPM. Determinar:

- a) La velocidad angular inicial
- b) La velocidad angular media
- c) La rapidez inicial
- d) El tiempo empleado

SOLUCIÓN:

5. A una partícula que está girando con una velocidad angular de 6 rad/s se le comunica una aceleración angular de $2,8 \text{ rad/s}^2$ durante 1 min. Si el radio de la trayectoria circular es de 0,6m, determinar:

- a) La rapidez inicial
- b) La velocidad angular final
- c) La rapidez final
- d) La velocidad angular media
- e) El desplazamiento angular
- f) Cuántas vueltas da
- g) El módulo de la aceleración total inicial

SOLUCIÓN:

6. La velocidad angular de un volante disminuye uniformemente de 1000 RPM en 7s. Si el radio de la curvatura es de 25cm, determinar:

- a) La rapidez inicial
- b) La velocidad angular media
- c) La aceleración angular
- d) El desplazamiento angular
- e) Cuántas vueltas da
- f) Qué tiempo será necesario para que el volante se detenga
- g) El modulo de la aceleración total final

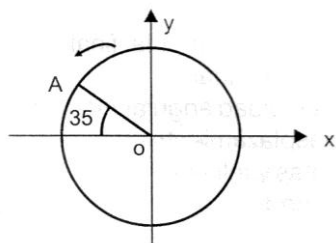
SOLUCIÓN:

7. Un volante de 10cm de radio gira en torno a su eje a razón de 400 RPM. Un freno lo para en 15s. Determinar:

- a) La velocidad angular inicial
- b) La rapidez en el momento de aplicar el freno
- c) La velocidad angular media
- d) El desplazamiento angular
- e) Cuántas vueltas da hasta detenerse
- f) La distancia recorrida
- g) El modulo de la aceleración total inicial

SOLUCIÓN:

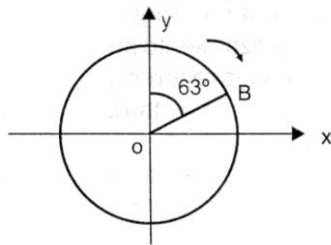
8. Una partícula describe una trayectoria circular de 0,8 m de radio en sentido antihorario. Si parte del reposo y del punto A, realizando un desplazamiento angular de 10 rad en 3s, determinar:



- a) La aceleración angular
- b) La posición angular final
- c) La posición final
- d) La velocidad angular media
- e) La distancia recorrida
- f) La velocidad final
- g) La aceleración total final

SOLUCIÓN:

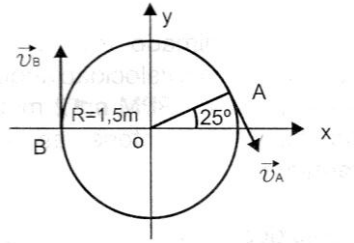
9. Una partícula se mueve en una trayectoria circular de 1,4m de radio en sentido horario. Si parte del reposo y del punto B, alcanzando una velocidad angular de 7rad/s en 4s, determinar:



- a) La aceleración angular
- b) El desplazamiento angular
- c) La velocidad angular media
- d) La posición angular final
- e) La posición final
- f) La velocidad final
- g) La aceleración total final

SOLUCIÓN:

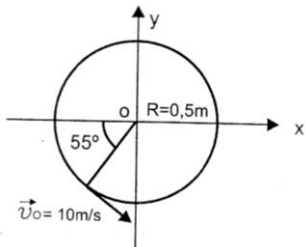
10. Una partícula animada de MCUV, parte del punto A, como indica la figura, con una rapidez de 4m/s y luego de 3s pasa por el punto B con una rapidez de 10m/s. Determinar:



- a) La velocidad angular inicial
- b) La aceleración angular
- c) El desplazamiento angular
- d) La posición inicial
- e) La velocidad en B
- f) La aceleración total en A
- g) La aceleración total en B

SOLUCIÓN:

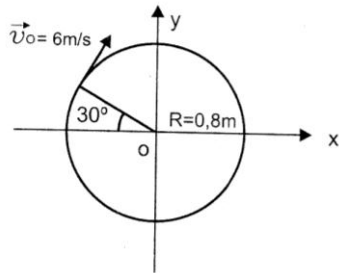
11. Una partícula se mueve en la trayectoria circular de la figura con una rapidez de 10m/s y una aceleración angular de $(-2\pi/5)\text{rad/s}^2$ hasta detenerse. Determinar:



- a) La velocidad angular inicial
- b) La velocidad inicial
- c) El tiempo hasta detenerse
- d) El desplazamiento angular
- e) La posición angular final
- f) La posición final
- g) La aceleración total inicial

SOLUCIÓN:

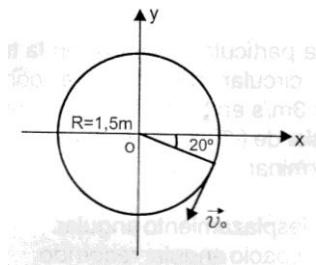
12. Una partícula animada de MCUV está en la posición que indica la figura. Si se mueve durante 4s con una aceleración angular de -1 rad/s^2 , determinar:



- La velocidad angular inicial
- La velocidad angular final
- El desplazamiento angular
- La posición angular final
- La posición final
- La velocidad final
- La aceleración total final

SOLUCIÓN:

13. Una partícula se mueve en la trayectoria circular de la figura con una $V=4\text{ m/s}$ en $t=0\text{ s}$ y una aceleración angular de $0,8\text{ rad/s}^2$. Determinar:

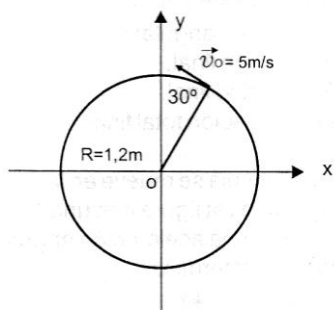


- El desplazamiento angular
- El espacio angular recorrido
- El espacio lineal recorrido
- La posición cuando $V_0 = 0$
- La posición final de la partícula

- f) La velocidad en $t=8s$
- g) La aceleración total en $t=8s$

SOLUCIÓN:

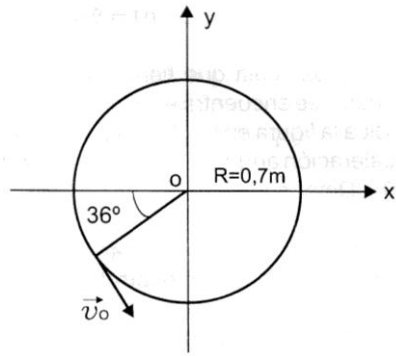
14. Una partícula que tiene movimiento circular, se encuentra en la posición que indica la figura en $t=4s$. Si gira con una aceleración angular de -1rad/s^2 durante 10s. Determinar:



- a) El desplazamiento angular
- b) El espacio angular recorrido
- c) El espacio lineal recorrido
- d) La posición cuando $V=0$
- e) La posición final de la partícula
- f) La velocidad en $t=14s$
- g) La aceleración total en $t=14s$

SOLUCIÓN:

15. Una partícula se mueve en la trayectoria circular de la figura con una $V_0 = 3\text{m/s}$ en $t=0s$ y una aceleración angular de $(-\pi/3)\text{rad/s}^2$ durante 7s. Determinar:



- a) El desplazamiento angular
- b) El espacio angular recorrido
- c) El espacio lineal recorrido
- d) La posición cuando $V=0$
- e) La posición final de la partícula
- f) La velocidad en $t=7s$
- g) La aceleración total en $t=7s$

SOLUCIÓN:

EJERCICIO N°13

1. Un cuerpo de 200kg adquiere una velocidad de 108km/h en 10s, cuando se le comunica una fuerza constante de 98[N]. Determinar:
 - a) La aceleración producida
 - b) Qué velocidad llevaba al empezar a acelerar

SOLUCIÓN:

Datos:

$m=200\text{kg}$

$V=108\text{km/h}$

$t=10s$

$F=98\text{[N]}$

- a)

$$F = m \times a$$

$$a = \frac{F}{m}$$

$$a = \frac{98[\text{N}]}{200 \text{ kg}}$$

$$a = 0,49 \text{ m/s}^2$$

b)

$$\frac{108 \text{ km}}{\text{h}} \left| \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right| \left| \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right| = 30 \text{ m/s}$$

$$V_f = V_0 + a \times t$$

$$V_0 = V_f - a \times t$$

$$V_0 = 30 \text{ m/s} - 0,49 \text{ m/s} \times 10 \text{ s}$$

$$V_0 = 25,1 \text{ m/s}$$

2. A un automóvil de 1000kg que va por una carretera recta se le acciona con una fuerza constante de 490[N] durante 8s, llegando a tener una velocidad de 36m/s. Determinar:

- a) La velocidad que tenía el automóvil antes de empezar a acelerar
- b) Qué velocidad lleva cuando ha recorrido 150m

SOLUCIÓN:

Datos:

$$m=1000\text{kg}$$

$$F=490[\text{N}]$$

$$t=8\text{s}$$

$$V_f = 36 \text{ m/s}$$

a)

$$F = m \times a$$

$$a = \frac{F}{m}$$

$$a = \frac{490 \text{ N}}{1000 \text{ kg}}$$

$$a = 0,49 \text{ m/s}^2$$

$$a = \frac{V_f - V_0}{t}$$

$$\Rightarrow V_0 = V_f - at$$

$$V_0 = 36 \text{ m/s} - 0,49 \text{ m/s}^2 \times 8 \text{ s}$$

$$V_0 = 32,08 \text{ m/s}$$

b)

$$V_f = \sqrt{V_0^2 + 2a \Delta r}$$

$$V_f = \sqrt{36 \text{ m/s}^2 + 2 \times 0,49 \text{ m/s}^2 \times 150 \text{ m}}$$

$$V_f = 37,99 \text{ m/s}$$

3. Una fuerza horizontal de 1568[N] produce una aceleración de $2,44 \text{ m/s}^2$ en un cuerpo de 400kg que descansa sobre una superficie horizontal. Determinar:

- a) La fuerza normal ejercida por la superficie sobre el cuerpo
- b) El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la superficie

SOLUCION:

Datos:

$$F=1568[\text{N}]$$

$$a = 2,44 \text{ m/s}^2$$

$$m=400\text{kg}$$

a)

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N - P = 0$$

$$N = P$$

$$N = m \times g$$

$$N = 400 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$N = 3920[\text{N}]$$

b)

$$\Sigma F_x = m \times a$$

$$F - f_r = m \times a$$

$$f_r = F - m \times a$$

$$f_r = 1568[\text{N}] - 400 \text{ kg} \times 2,44 \text{ m/s}^2$$

$$f_r = 592[\text{N}]$$

$$f_r = \mu \cdot N$$

$$\mu = \frac{f_r}{N}$$

$$\mu = \frac{592[\text{N}]}{3920[\text{N}]}$$

$$\mu = 0,15$$

4. Un cuerpo de 6kg parte del reposo y adquiere una velocidad de 36km/h en una distancia horizontal de 28m. Si $\mu = 0,25$, determinar:

- La aceleración producida
- El valor de la fuerza horizontal aplicada

SOLUCIÓN:

Datos:

$$m = 6 \text{ kg}$$

$$V_f = 36 \text{ km/h}$$

$$\Delta r = 20 \text{ m}$$

$$\mu = 0,25$$

a)

$$\frac{36 \text{ km}}{\text{h}} \left| \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right| \left| \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right| = 10 \text{ m/s}$$

$$V_f^2 = V_0^2 + 2a \Delta r$$

$$a = \frac{V_f^2 - \cancel{V_0^2}}{2 \Delta r}$$

$$a = \frac{(10 \text{ m/s})^2}{2 \times 28 \text{ m}}$$

$$a = 1,79 \text{ m/s}^2$$

b)

$$\sum F_x = m \times a$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F - f_r = m \times a$$

$$N - mg = 0$$

$$f_r = \mu N \dots\dots\dots(3)$$

$$F = m \times a + f_r \dots\dots\dots(1)$$

$$N = mg \dots\dots\dots(2)$$

(2) y (3) en (1)

$$F = ma + \mu mg$$

$$F = 6 \text{ kg} \times 1,79 \text{ m/s}^2 + 0,25 \times 6 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$F = 25,44 \text{ [N]}$$

5. En un lugar de la superficie terrestre, un cuerpo de 500g pesa 4,89[N]. Determinar:

- a) El valor de la aceleración de la gravedad en dicho punto
- b) La masa de un cuerpo de 200[N] en dicho lugar

SOLUCIÓN:

Datos:

$$m = 500 \text{ g} = 0,5 \text{ kg}$$

$$P = 4,89 \text{ [N]}$$

a)

$$P = m \times g$$

$$g = \frac{P}{m}$$

$$g = \frac{4,89 \text{ [N]}}{0,5 \text{ kg}}$$

$$g = 9,78 \text{ m/s}^2$$

b)

$$P = m \times g$$

$$m = \frac{P}{g}$$

$$m = \frac{200 \text{ [N]}}{9,78 \text{ m/s}^2}$$

$$m = 20,45 \text{ kg}$$

6. Un automóvil de 1200kg cambia su velocidad en forma constante de $(-12,61\vec{i}-12,79\vec{j})\text{km/h}$ a $(-70\vec{i}-71\vec{j})\text{km/h}$ en 1 minuto. Determinar:

- a) La aceleración producida
- b) La fuerza ejercida por el motor

SOLUCIÓN:

a)

$$\frac{(-12,61\vec{i}-12,79\vec{j})\text{km}}{\text{h}} \left| \frac{1000\text{m}}{1\text{km}} \right| \left| \frac{1\text{h}}{3600\text{s}} \right| = (-3,50\vec{i}-3,55\vec{j})\text{m/s}$$

$$\frac{(-70\vec{i}-71\vec{j})\text{km}}{\text{h}} \left| \frac{1000\text{m}}{1\text{km}} \right| \left| \frac{1\text{h}}{3600\text{s}} \right| = (-19,44\vec{i}-19,72\vec{j})\text{m/s}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{V}_f - \vec{V}_0}{t}$$

$$\vec{a} = \frac{(-19,44\vec{i}-19,72\vec{j})\text{m/s} - (-3,50\vec{i}-3,55\vec{j})\text{m/s}}{60\text{s}}$$

$$\vec{a} = (-0,265\vec{i}-0,269\vec{j})\text{m/s}^2$$

b)

$$F = ma$$

$$F = 1200\text{kg}(-0,265\vec{i}-0,269\vec{j})\text{m/s}^2$$

$$F = (-318\vec{i}-322,8\vec{j})\text{N}$$

7. Un cuerpo de 8kg está en reposo en el punto $(4, -7)\text{m}$ en $t=0\text{s}$. Si se le aplica una fuerza constante de $(8\vec{i}+16\vec{j})[\text{N}]$, determinar:

- a) La posición del cuerpo en $t=8\text{s}$
- b) La velocidad del cuerpo en $t=12\text{s}$

SOLUCIÓN:

Datos:

$$m=8\text{kg}$$

$$\vec{r}_0 = (4, -7)\text{m}$$

$$\vec{F} = (-8\vec{i} + 16\vec{j})[\text{N}]$$

a)

$$\vec{F} = m \times \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{a} = \frac{(-8\vec{i} + 16\vec{j})[\text{N}]}{8\text{kg}}$$

$$\vec{a} = (-\vec{i} + 2\vec{j})\text{m/s}^2$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_0 + \cancel{\vec{V}_0 \times t} + \frac{1}{2} \vec{a} \times t^2$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_0 + \frac{1}{2} \vec{a} \times t^2$$

$$\vec{r}_f = (4\vec{i} - 7\vec{j})\text{m} + \frac{1}{2}(-\vec{i} + 2\vec{j})\text{m/s}^2 (8\text{s})^2$$

$$\vec{r}_f = (4\vec{i} - 7\vec{j})\text{m} + (-32\vec{i} + 64\vec{j})\text{m}$$

$$\vec{r}_f = (-28\vec{i} + 57\vec{j})\text{m}$$

b)

$$\vec{a} = \frac{\vec{V}}{t}$$

$$\vec{V} = \vec{a} \times t$$

$$\vec{V} = (-\vec{i} + 2\vec{j})\text{m/s}^2 \times 12\text{s}$$

$$\vec{V} = (-12\vec{i} + 24\vec{j})\text{m/s}^2$$

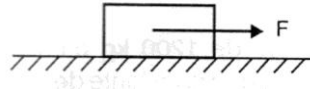
8. Un cuerpo de 2kg se encuentra en el punto $(5, 2)\text{m}$ en $t=2\text{s}$ con una velocidad de $(-7\vec{i} + 3\vec{j})\text{m/s}$. Si se le aplica sobre él una fuerza constante de $(-175\vec{i} + 75\vec{j})[\text{N}]$ durante 6s; determinar:

- a) La posición final del cuerpo
- b) El desplazamiento realizado por el cuerpo
- c) La velocidad final del cuerpo

SOLUCIÓN:

9. En la figura, un cuerpo de 20kg se mueve a lo largo de una superficie horizontal lisa con una aceleración constante de 1m/s^2 . Determinar:

- a) El valor de la fuerza normal
- b) Qué fuerza F se necesita para producir esa aceleración



SOLUCIÓN:

Datos:

$$m=20\text{kg}$$

$$a = 1\text{m/s}^2$$

a)

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N - P = 0$$

$$N = P$$

$$N = m \times g$$

$$N = 20\text{ kg} \times 9,8[\text{N}]$$

$$N = 196[\text{N}]$$

b)

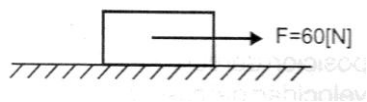
$$F = m \times a$$

$$F = 20\text{ kg} \times 1\text{m/s}^2$$

$$F = 20[\text{N}]$$

10. Un bloque de 15kg se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal como indica la figura. Cuando sobre él actúa una fuerza de 60[N] durante 3s y si $\mu_c = 0,2$, determinar:

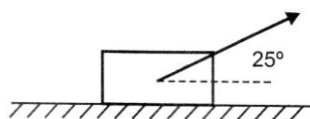
- a) La aceleración del bloque
- b) La velocidad final del bloque



SOLUCIÓN:

11. En la figura, si el cuerpo es de 10kg y $\mu_c = 0,15$, determinar:

- Qué valor debe tener la fuerza para que el cuerpo se mueva con velocidad constante
- Qué valor debe tener la fuerza para que el cuerpo se mueva con una aceleración de 2 m/s^2



SOLUCIÓN:

Datos:

$$m=10\text{kg}$$

$$\mu_c = 0,15$$

a)

$$f_r = \mu \cdot N \dots\dots\dots(2)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N - P + F \sin 25 = 0$$

$$N = P - F \sin 25 \dots\dots\dots(1)$$

$$P = m \times g$$

$$P = 10 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$P = 98[\text{N}]$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F \cos 25^\circ - \mu P = 0 \dots \dots \dots (3)$$

(1) y (2) en (3)

$$F \cos 25^\circ - \mu (P - F \sin 25^\circ) = 0$$

$$F \cos 25^\circ + \mu F \sin 25^\circ - \mu P = 0$$

$$F (\cos 25^\circ + \mu \sin 25^\circ) = \mu P$$

$$F = \frac{\mu P}{(\cos 25^\circ + \mu \sin 25^\circ)}$$

$$F = \frac{0,15 \times 98[N]}{(\cos 25^\circ + 0,15 \sin 25^\circ)}$$

$$F = 15,16[N]$$

b)

$$\sum F_x = m \times a$$

$$F \cos 25^\circ - \mu P = m \times a \dots \dots \dots (4)$$

(1) y (2) en (4)

$$F \cos 25^\circ - \mu (P - F \sin 25^\circ) = m \times a$$

$$F \cos 25^\circ + \mu F \sin 25^\circ - \mu P = m \times a$$

$$F (\cos 25^\circ + \mu \sin 25^\circ) = \mu P + m \times a$$

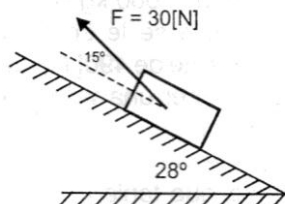
$$F = \frac{\mu P + m \times a}{(\cos 25^\circ + \mu \sin 25^\circ)}$$

$$F = \frac{0,15 \times 98[N] + 10 \text{ kg} \times 2 \text{ m/s}^2}{(\cos 25^\circ + 0,15 \sin 25^\circ)}$$

$$F = 35,78[N]$$

12. Un cuerpo de 5kg es empujado hacia arriba de un plano inclinado liso mediante una fuerza de 30[N] como indica la figura. Determinar:

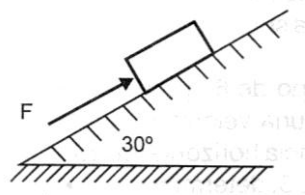
- a) La fuerza que ejerce el plano sobre el cuerpo
- b) La aceleración del bloque



SOLUCIÓN:

13. En la figura, si el bloque es de 30 kg y $\mu_c = 0,2$, determinar-.

- a) El valor de F para que el bloque suba con velocidad constante
- b) El valor de F para que el bloque baje con velocidad constante
- c) El valor de F para que el bloque suba con una aceleración de 1m/s^2
- d) El valor de F para que el bloque baje con una aceleración de 1m/s^2



SOLUCIÓN:

Datos:

$$m=30\text{kg}$$

$$\mu_c = 0,2$$

a)

$$\sum F_x = 0$$

$$F_x - f_r - P_x = 0$$

$$F \cos 15^\circ - f_r - mg \sin 28^\circ = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$f_r = \mu N \dots \dots \dots (3)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N + F_y - P_y = 0$$

$$N = P_y - F_y$$

$$N = mg \cos 28^\circ - F \sin 15^\circ \dots \dots \dots (2)$$

(2) y (3) en (1)

$$F \cos 15^\circ - fr - mg \sin 28^\circ = 0$$

$$F \cos 15^\circ - \mu (mg \cos 28^\circ - F \sin 15^\circ) - mg \sin 28^\circ = 0$$

$$F \cos 15^\circ - \mu mg \cos 28^\circ + \mu F \sin 15^\circ - mg \sin 28^\circ = 0$$

$$F \cos 15^\circ + \mu F \sin 15^\circ = \mu mg \cos 28^\circ + mg \sin 28^\circ$$

$$F (\cos 15^\circ + \mu \sin 15^\circ) = mg (\mu \cos 28^\circ + \sin 28^\circ)$$

$$F = \frac{mg (\mu \cos 28^\circ + \sin 28^\circ)}{(\cos 15^\circ + \mu \sin 15^\circ)}$$

$$F = \frac{30 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2 (0,2 \cos 28^\circ + \sin 28^\circ)}{(\cos 15^\circ + 0,2 \sin 15^\circ)}$$

$$F = 186,64 \text{ [N]}$$

b)

$$\sum F_x = 0$$

$$P_x - F_x - fr = 0$$

$$mg \sin 28^\circ - F \cos 15^\circ - fr = 0 \dots\dots\dots(4)$$

(2) y (3) en (4)

$$mg \sin 28^\circ - F \cos 15^\circ - fr = 0$$

$$mg \sin 28^\circ - F \cos 15^\circ - \mu (mg \cos 28^\circ - F \sin 15^\circ) = 0$$

$$mg \sin 28^\circ - F \cos 15^\circ - \mu mg \cos 28^\circ + \mu F \sin 15^\circ = 0$$

$$\mu F \sin 15^\circ - F \cos 15^\circ = \mu mg \cos 28^\circ - mg \sin 28^\circ$$

$$F (\mu \sin 15^\circ - \cos 15^\circ) = mg (\mu \cos 28^\circ - \sin 28^\circ)$$

$$F = \frac{mg (\mu \cos 28^\circ - \sin 28^\circ)}{(\mu \sin 15^\circ - \cos 15^\circ)}$$

$$F = \frac{30 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2 (0,2 \cos 28^\circ - \sin 28^\circ)}{(0,2 \sin 15^\circ - \cos 15^\circ)}$$

$$F = 94,19 \text{ [N]}$$

c)

$$\sum F_x = m \times a$$

$$F_x - fr - P_x = m \times a$$

$$F \cos 15^\circ - fr - mg \sin 28^\circ = m \times a \dots\dots\dots(5)$$

(2) y (3) en (5)

$$F \cos 15^\circ - f_r - m g \sin 28^\circ = m \times a$$

$$F \cos 15^\circ - \mu (m g \cos 28^\circ - F \sin 15^\circ) - m g \sin 28^\circ = m \times a$$

$$F \cos 15^\circ - \mu m g \cos 28^\circ + m F \sin 15^\circ - m g \sin 28^\circ = m \times a$$

$$F \cos 15^\circ + \mu F \sin 15^\circ = \mu m g \cos 28^\circ + m g \sin 28^\circ + m \times a$$

$$F (\cos 15^\circ + \mu \sin 15^\circ) = m g (\mu \cos 28^\circ + \sin 28^\circ) + m \times a$$

$$F = \frac{m g (\mu \cos 28^\circ + \sin 28^\circ) + m \times a}{(\cos 15^\circ + \mu \sin 15^\circ)}$$

$$F = \frac{30 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2 (0,2 \cos 28^\circ + \sin 28^\circ) + 30 \text{ kg} \times 1 \text{ m/s}^2}{(\cos 15^\circ + 0,2 \sin 15^\circ)}$$

$$F = 216,12 [\text{N}]$$

d)

$$\sum F_x = m \times a$$

$$P_x - F_x - f_r = m \times a$$

$$m g \sin 28^\circ - F \cos 15^\circ - f_r = m \times a \dots\dots\dots(6)$$

(2) y (3) en (4)

$$m g \sin 28^\circ - F \cos 15^\circ - f_r = m \times a$$

$$m g \sin 28^\circ - F \cos 15^\circ - \mu (m g \cos 28^\circ - F \sin 15^\circ) = m \times a$$

$$m g \sin 28^\circ - F \cos 15^\circ - \mu m g \cos 28^\circ + m F \sin 15^\circ = m \times a$$

$$\mu F \sin 15^\circ - F \cos 15^\circ = \mu m g \cos 28^\circ - m g \sin 28^\circ + m \times a$$

$$F (\mu \sin 15^\circ - \cos 15^\circ) = m g (\mu \cos 28^\circ - \sin 28^\circ) + m \times a$$

$$F = \frac{m g (\mu \cos 28^\circ - \sin 28^\circ) + m \times a}{(\mu \sin 15^\circ - \cos 15^\circ)}$$

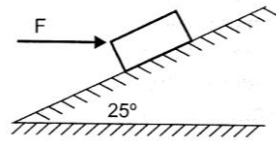
$$F = \frac{30 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2 (0,2 \cos 28^\circ - \sin 28^\circ) + 30 \text{ kg} \times 1 \text{ m/s}^2}{(0,2 \sin 15^\circ - \cos 15^\circ)}$$

$$F = 61,36 [\text{N}]$$

14. En la figura, si el bloque es de 16kg y $\mu_c = 0,1$, determinar:

- a) El valor de F para que el bloque suba con velocidad constante
- b) El valor de F para que el bloque baje con velocidad constante
- c) El valor de F para que el bloque suba con una aceleración de 2 m/s^2

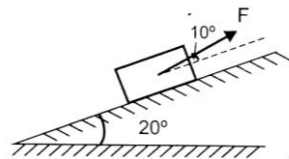
- d) El valor de F para que el bloque baje con una aceleración de 2 m/s^2



SOLUCIÓN:

15. En la figura, si el bloque es de 10 kg y $\mu_c = 0,15$, determinar:

- El valor de F para que el bloque suba con velocidad constante
- El valor de F para que el bloque baje con velocidad constante
- El valor de F para que el bloque suba con una aceleración de $0,7 \text{ m/s}^2$
- El valor de F para que el bloque baje con una aceleración de $0,7 \text{ m/s}^2$



SOLUCIÓN:

Datos:

$$m = 10 \text{ kg}$$

$$\mu_c = 0,15$$

a)

$$\sum F_x = 0$$

$$F_x - f_r - P_x = 0$$

$$F \cos 10^\circ - f_r - mg \sin 20^\circ = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$f_r = \mu N \dots \dots \dots (3)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N + F_y - P_y = 0$$

$$N = P_y - F_y$$

$$N = mg \cos 20^\circ - F \sin 10^\circ \dots \dots \dots (2)$$

(2) y (3) en (1)

$$F \cos 10^\circ - fr - mg \sin 20^\circ = 0$$

$$F \cos 10^\circ - \mu (mg \cos 20^\circ - F \sin 10^\circ) - mg \sin 20^\circ = 0$$

$$F \cos 10^\circ - \mu mg \cos 20^\circ + m F \sin 10^\circ - mg \sin 20^\circ = 0$$

$$F \cos 10^\circ + \mu F \sin 10^\circ = \mu mg \cos 20^\circ + mg \sin 20^\circ$$

$$F (\cos 10^\circ + \mu \sin 10^\circ) = mg (\mu \cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$$

$$F = \frac{mg (\mu \cos 20^\circ + \sin 20^\circ)}{(\cos 10^\circ + \mu \sin 10^\circ)}$$

$$F = \frac{10 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2 (0,15 \cos 20^\circ + \sin 20^\circ)}{(\cos 10^\circ + 0,15 \sin 10^\circ)}$$

$$F = 46,82 [\text{N}]$$

b)

$$\sum F_x = 0$$

$$P_x - F_x - fr = 0$$

$$mg \sin 20^\circ - F \cos 10^\circ - fr = 0 \dots \dots \dots (4)$$

(2) y (3) en (4)

$$mg \sin 20^\circ - F \cos 10^\circ - fr = 0$$

$$mg \sin 20^\circ - F \cos 10^\circ - \mu (mg \cos 20^\circ - F \sin 10^\circ) = 0$$

$$mg \sin 20^\circ - F \cos 10^\circ - \mu mg \cos 20^\circ + m F \sin 10^\circ = 0$$

$$\mu F \sin 10^\circ - F \cos 10^\circ = \mu mg \cos 20^\circ - mg \sin 20^\circ$$

$$F (\mu \sin 10^\circ - \cos 10^\circ) = mg (\mu \cos 20^\circ - \sin 20^\circ)$$

$$F = \frac{mg (\mu \cos 20^\circ - \sin 20^\circ)}{(\mu \sin 10^\circ - \cos 10^\circ)}$$

$$F = \frac{10 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2 (0,15 \cos 20^\circ - \sin 20^\circ)}{(0,15 \sin 10^\circ - \cos 10^\circ)}$$

$$F = 20,55 [\text{N}]$$

c)

$$\sum F_x = m \times a$$

$$F_x - fr - P_x = m \times a$$

$$F \cos 10^\circ - fr - mg \sin 20^\circ = m \times a \dots \dots \dots (5)$$

(2) y (3) en (5)

$$F \cos 10^\circ - f_r - mg \sin 20^\circ = m \times a$$

$$F \cos 10^\circ - \mu (mg \cos 20^\circ - F \sin 10^\circ) - mg \sin 20^\circ = m \times a$$

$$F \cos 10^\circ - \mu mg \cos 20^\circ + \mu F \sin 10^\circ - mg \sin 20^\circ = m \times a$$

$$F \cos 10^\circ + \mu F \sin 10^\circ = \mu mg \cos 20^\circ + mg \sin 20^\circ + m \times a$$

$$F (\cos 10^\circ + \mu \sin 10^\circ) = mg (\mu \cos 20^\circ + \sin 20^\circ) + m \times a$$

$$F = \frac{mg (\mu \cos 20^\circ + \sin 20^\circ) + m \times a}{(\cos 10^\circ + \mu \sin 10^\circ)}$$

$$F = \frac{10 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2 (0,15 \cos 20^\circ + \sin 20^\circ) + 10 \text{ kg} \times 0,7 \text{ m/s}^2}{(\cos 10^\circ + 0,15 \sin 10^\circ)}$$

$$F = 53,75 [\text{N}]$$

d)

$$\sum F_x = m \times a$$

$$P_x - F_x - f_r = m \times a$$

$$mg \sin 28^\circ - F \cos 15^\circ - f_r = m \times a \dots\dots\dots(6)$$

(2) y (3) en (4)

$$mg \sin 20^\circ - F \cos 10^\circ - f_r = m \times a$$

$$mg \sin 20^\circ - F \cos 10^\circ - \mu (mg \cos 20^\circ - F \sin 10^\circ) = m \times a$$

$$mg \sin 20^\circ - F \cos 10^\circ - \mu mg \cos 20^\circ + \mu F \sin 10^\circ = m \times a$$

$$\mu F \sin 10^\circ - F \cos 10^\circ = \mu mg \cos 20^\circ - mg \sin 20^\circ + m \times a$$

$$F (\mu \sin 10^\circ - \cos 10^\circ) = mg (\mu \cos 20^\circ - \sin 20^\circ) + m \times a$$

$$F = \frac{mg (\mu \cos 20^\circ - \sin 20^\circ) + m \times a}{(\mu \sin 10^\circ - \cos 10^\circ)}$$

$$F = \frac{10 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2 (0,15 \cos 20^\circ - \sin 20^\circ) + 10 \text{ kg} \times 0,7 \text{ m/s}^2}{(0,15 \sin 10^\circ - \cos 10^\circ)}$$

$$F = 13,25 [\text{N}]$$

16. Se lanza un cuerpo hacia arriba, en un plano inclinado de 28° respecto a la horizontal, con una velocidad inicial de 10m/s. Si $\mu_c = 0,2$, determinar:

a) La distancia recorrida por el cuerpo sobre el plano hasta detenerse

b) El tiempo empleado en subir

SOLUCIÓN:

17. Dos cuerpos del mismo peso, inicialmente en reposo, se dejan en libertad sobre un plano inclinado de 30° , hallándose separados 25cm. Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo superior y el plano es 0,1 y entre el inferior y el plano es 0,25, determinar:

a) En qué tiempo el cuerpo superior alcanza al inferior

b) La distancia recorrida por el cuerpo inferior hasta que es alcanzado por el cuerpo superior

SOLUCIÓN:

Datos:

$$m_A = m_B$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$e = 25\text{cm} = 0,25\text{m}$$

$$\mu_A = 0,1$$

$$\mu_B = 0,25$$

a)

CUERPO A

$$\sum F_x = m_A \times a_A$$

$$P_A \times \sin 30^\circ - f_{rA} = m_A \times a_A$$

$$m_A g \sin 30^\circ - \mu_A m_A g \cos 30^\circ = m_A \times a_A$$

$$\cancel{m_A} \times a_A = \cancel{m_A} g \sin 30^\circ - \mu_A \cancel{m_A} g \cos 30^\circ$$

$$a_A = g(\sin 30^\circ - \mu_A \cos 30^\circ)$$

$$a_A = 9,8\text{m/s}^2 (\sin 30^\circ - 0,1 \cos 30^\circ)$$

$$a_A = 4,05\text{m/s}^2$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N - P_y = 0$$

$$N = P_y$$

$$N = m_A g \cos 30^\circ$$

$$\sum F_x = m_B \times a_B$$

$$P_x - f_{r_B} = m_B \times a_B$$

$$m_B g \sin 30^\circ - \mu_B m_A g \cos 30^\circ = m_B \times a_B$$

$$\cancel{m_B} \times a_B = \cancel{m_B} g \sin 30^\circ - \mu_B \cancel{m_B} g \cos 30^\circ$$

$$a_B = g(\sin 30^\circ - \mu_B \cos 30^\circ)$$

$$a_B = 9,8 \text{ m/s}^2 (\sin 30^\circ - 0,25 \cos 30^\circ)$$

$$a_B = 2,77 \text{ m/s}^2$$

De la ecuación

$$\Delta r = V_0 \times t + \frac{1}{2} a \times t^2$$

Cuerpo A

$$\Delta r = \cancel{V_0} \times t + \frac{1}{2} a_A \times t^2$$

$$x + e = \frac{1}{2} a_A t^2$$

$$x = \frac{1}{2} a_A t^2 - e \dots \dots \dots (1)$$

Cuerpo B

$$\Delta r = \cancel{V_0} \times t + \frac{1}{2} a_B \times t^2$$

$$x = \frac{1}{2} a_B t^2 \dots \dots \dots (2)$$

Igualando (1) y (2)

$$\frac{1}{2} a_A t^2 - e = \frac{1}{2} a_B t^2$$

$$\frac{1}{2} a_A t^2 - \frac{1}{2} a_B t^2 = e$$

$$t^2 (a_A - a_B) = 2e$$

$$t = \sqrt{\frac{2e}{(a_A - a_B)}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 0,25 \text{ m}}{(4,05 \text{ m/s}^2 - 2,77 \text{ m/s}^2)}}$$

$$t = 0,63 \text{ s}$$

b)

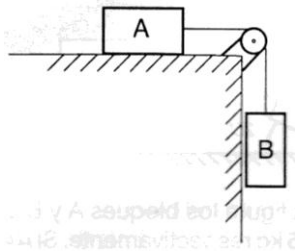
$$x = \frac{1}{2} a_A \times t^2 - e$$

$$x = \frac{1}{2} 4,05 \text{ m/s}^2 \times 0,63 \text{ s}^2 - 0,25 \text{ m}$$

$$x = 0,56 \text{ m}$$

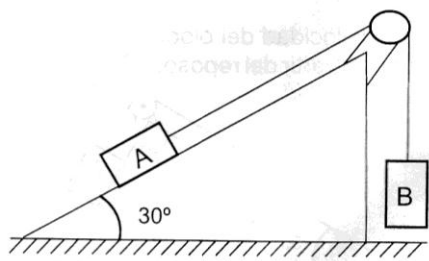
18. En la figura los bloques A y B son de 100 y 30 kg respectivamente. Determinar la aceleración de cada bloque y la tensión de la cuerda cuando:

- No hay rozamiento
- El coeficiente de rozamiento cinético entre el cuerpo y el plano es 0,15



SOLUCIÓN:

19. En la figura los bloques A y B son de 5 y 8kg respectivamente. Si el plano inclinado es liso, determinar:



- La aceleración en cada bloque
- En qué sentido se mueve cada uno de los bloques
- La tensión de la cuerda
- La velocidad del bloque B a los 2s de dejarlo en libertad

SOLUCIÓN:

Datos:

$$m_A = 5 \text{ kg}$$

$$m_B = 8 \text{ kg}$$

a)

CUERPO A

$$\sum F_x = m_A \times a$$

$$T - P_A \times \sin 30^\circ = m_A \times a$$

$$T - m_A g \sin 30^\circ = m_A \times a \dots\dots\dots(1)$$

CUERPO B

$$\sum F_y = m_B \times a$$

$$P_B - T = m_B \times a$$

$$T = m_B g - m_B \times a \dots\dots\dots(2)$$

(2) en (1)

$$T - m_A g \sin 30^\circ = m_A \times a$$

$$m_B g - m_B \times a - m_A g \sin 30^\circ = m_A \times a$$

$$m_A \times a + m_B \times a = m_B g - m_A g \sin 30^\circ$$

$$a(m_A + m_B) = g(m_B - m_A \sin 30^\circ)$$

$$a = \frac{g(m_B - m_A \sin 30^\circ)}{(m_A + m_B)}$$

$$a = \frac{9,8 \text{ m/s}^2 (8 \text{ kg} - 5 \text{ kg} \sin 30^\circ)}{(5 \text{ kg} + 8 \text{ kg})}$$

$$a = 4,15 \text{ m/s}^2$$

b)

A=hacia arriba

B=hacia abajo

c)

$$T = m_B g - m_B \times a$$

$$T = 8 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2 - 8 \text{ kg} \times 4,15 \text{ m/s}^2$$

$$T = 45,20 \text{ [N]}$$

d)

$$a = \frac{V}{t}$$

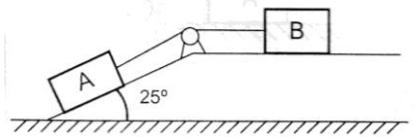
$$V = a \times t$$

$$V = 4,15 \text{ m/s}^2 \times 2 \text{ s}$$

$$V = 8,3 \text{ m/s}$$

20. En la figura el bloque B es de 10kg. Si el coeficiente de rozamiento cinético para todas las superficies es 0,3, determinar:

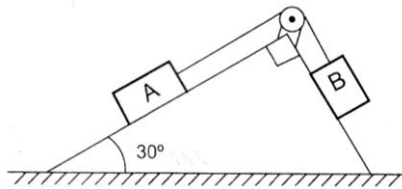
- a) La masa del bloque A para que los dos bloques se muevan con velocidad constante
- b) La masa del bloque A para que los dos bloques se muevan con una aceleración de $1,5 \text{ m/s}^2$



SOLUCIÓN:

21. En la figura los bloques A y B son de 45 y 15kg respectivamente. Si $\mu_c = 0,2$ para todas las superficies, determinar:

- a) La aceleración de cada bloque
- b) En qué sentido se mueven los bloques
- c) La velocidad del bloque A, 4s después de partir del reposo



SOLUCIÓN:

Datos:

$$m_A = 45 \text{ kg}$$

$$m_B = 15 \text{ kg}$$

$$\mu_c = 0,2$$

a)

CUERPO A

$$\sum F_x = m_A \cdot a$$

$$P_A \cdot x - T_{AB} - f_{r_A} = m_A \cdot a$$

$$T_{AB} = m_A g \sin 30^\circ - f_{r_A} - m_A \cdot a \dots\dots\dots(1)$$

$$f_r = \mu \times N \dots\dots\dots(3)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N - P_y = 0$$

$$N = m_A g \cos 30^\circ \dots\dots\dots(2)$$

(2) y (3) en (1)

$$T_{AB} = m_A g \sin 30^\circ - \mu m_A g \cos 30^\circ - m_A \cdot a \dots\dots\dots(4)$$

CUERPO B

$$\sum F_x = 0$$

$$T_{AB} - P_B \cdot x - f_{r_B} = m_B \cdot a$$

$$T_{AB} = m_B g \sin 60^\circ + f_{r_B} + m_B \cdot a \dots\dots\dots(5)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N_B - P_B \cdot y = 0$$

$$N_B = m_B g \cos 60^\circ \dots\dots\dots(6)$$

(3) y (6) en (5)

$$T_{AB} = m_B g \sin 60^\circ + \mu m_B g \cos 60^\circ + m_B \cdot a \dots\dots\dots(7)$$

Igualando (4) y (7)

$$m_A g \sin 30^\circ - \mu m_A g \cos 30^\circ - m_A \cdot a = m_B g \sin 60^\circ + \mu m_B g \cos 60^\circ + m_B \cdot a$$

$$m_A \cdot a + m_B \cdot a = m_A g \sin 30^\circ - \mu m_A g \cos 30^\circ - m_B g \sin 60^\circ - \mu m_B g \cos 60^\circ$$

$$a = \frac{m_A g \sin 30^\circ - \mu m_A g \cos 30^\circ - m_B g \sin 60^\circ - \mu m_B g \cos 60^\circ}{m_A + m_B}$$

$$a = \frac{45 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 30^\circ - 0,2 \cdot 45 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot \cos 30^\circ - 15 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 60^\circ - 0,2 \cdot 15 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot \cos 60^\circ}{45 \text{ kg} + 15 \text{ kg}}$$

$$a = 0,035 \text{ m/s}^2$$

b)

A=hacia arriba

B=hacia abajo

c)

$$a = \frac{V}{t}$$

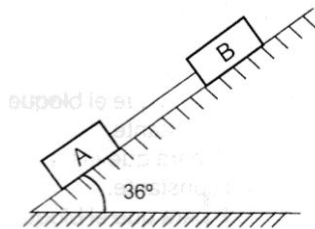
$$V = a \cdot t$$

$$V = 0,035 \text{ m/s}^2 \cdot 4 \text{ s}$$

$$V = 0,14 \text{ m/s}$$

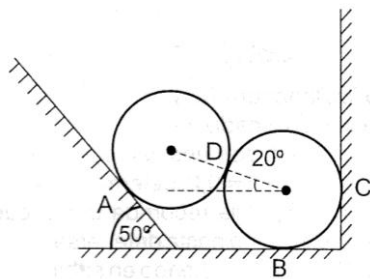
22. Dos cuerpos A y B de 20 y 12kg respectivamente están unidos por una cuerda flexible e inextensible como indica la figura. Si $\mu_A = 0,25$ y $\mu_B = 0,32$, determinar:

- La tensión de la cuerda cuando se dejan libres los cuerpos
- La aceleración de cada bloque
- La distancia recorrida por el bloque A 3s después de partir del reposo



SOLUCIÓN:

23. Dos esferas iguales y lisas de 15kg cada una, están apoyadas como se indica en la figura. Si las paredes son lisas, determinar las reacciones producidas en los puntos de apoyo A, B, C, D.



SOLUCIÓN:

Datos:

$$m_1 = m_2 = 15 \text{ kg}$$

CUERPO 1

$$\sum F_y = 0$$

$$R_A \cos 50^\circ + R_D \sin 20^\circ - mg = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$R_A \sin 50^\circ - R_D \cos 20^\circ = 0$$

$$R_D = \frac{R_A \sin 50^\circ}{\cos 20^\circ} \dots\dots\dots(2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$R_A \cos 50^\circ + \left(\frac{R_A \sin 50^\circ}{\cos 20^\circ} \right) \sin 20^\circ - mg = 0$$

$$R_A \cos 50^\circ \cos 20^\circ + R_A \sin 50^\circ \sin 20^\circ = mg \cos 20^\circ$$

$$R_A (\cos 50^\circ \cos 20^\circ + \sin 50^\circ \sin 20^\circ) = mg \cos 20^\circ$$

$$R_A = \frac{mg \cos 20^\circ}{\cos 50^\circ \cos 20^\circ + \sin 50^\circ \sin 20^\circ}$$

$$R_A = \frac{15 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cos 20^\circ}{\cos 50^\circ \cos 20^\circ + \sin 50^\circ \sin 20^\circ}$$

$$\boxed{R_A = 159,50[\text{N}]}$$

Reemplazando el valor de R_A en (2)

$$R_D = \frac{159,50[\text{N}] \sin 50^\circ}{\cos 20^\circ}$$

$$\boxed{R_D = 130,03[\text{N}]}$$

CUERPO 2

$$\sum F_y = 0$$

$$R_B - R_D \sin 20^\circ - mg = 0$$

$$R_B = R_D \sin 20^\circ + mg \dots\dots\dots(3)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$R_D \cos 20^\circ - R_C = 0$$

$$R_C = R_D \cos 20^\circ \dots\dots\dots(4)$$

Reemplazando el valor de R_D en (3)

$$R_B = 130,03[\text{N}] \sin 20^\circ + 15 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$\boxed{R_B = 191,47[\text{N}]}$$

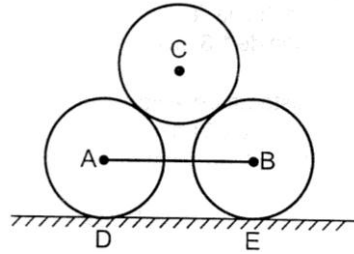
Reemplazando el valor de R_D en (4)

$$R_C = 130,03[\text{N}] \cos 20^\circ$$

$$\boxed{R_C = 122,19[\text{N}]}$$

24. Dos cilindros lisos e iguales de 20kg cada uno y de radio 10cm, tienen conectados sus centros por medio de una cuerda AB de 25cm de longitud, descansando sobre un plano horizontal sin rozamiento, Un tercer cilindro, también liso de 30kg y de 10cm de radio, se coloca sobre los dos anteriores como indica la figura. Determinar:

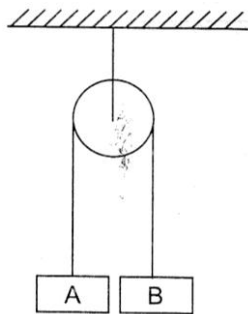
- La tensión de la cuerda AB
- Las fuerzas ejercidas sobre el piso en los puntos de contacto D y E



SOLUCIÓN:

25. Dos cuerpos A y B de 35 y 30 kg respectivamente, están sujetos por una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento. Si los cuerpos parten del reposo, determinar:

- La aceleración de cada bloque
- La tensión de la cuerda
- La distancia recorrida por el cuerpo A en 6s



SOLUCIÓN:

Datos:

$$m_A = 35 \text{ kg}$$

$$m_B = 30 \text{ kg}$$

$$V_0 = 0$$

a)

CUERPO A

CUERPO B

$$\sum F_y = m_A a$$

$$\sum F_y = m_B a$$

$$P_A - T = m_A a$$

$$T - P_B = m_B a$$

$$T = m_A g - m_A a \dots\dots\dots(1)$$

$$T = m_B g + m_B a \dots\dots\dots(2)$$

Igualando (1) y (2)

$$m_A g - m_A a = m_B g + m_B a$$

$$m_A a + m_B a = m_A g - m_B g$$

$$a(m_A + m_B) = m_A g - m_B g$$

$$a = \frac{m_A g - m_B g}{m_A + m_B}$$

$$a = \frac{35 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 - 30 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2}{35 \text{ kg} + 30 \text{ kg}}$$

$$a = 0,75 \text{ m/s}^2$$

b)

Reemplazando el valor de a en (1)

$$T = 35 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 - 35 \text{ kg} \cdot 0,75 \text{ m/s}^2$$

$$T = 316,64 [\text{N}]$$

c)

$$\Delta r = \cancel{y_0} t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\Delta r = \frac{1}{2} a t^2$$

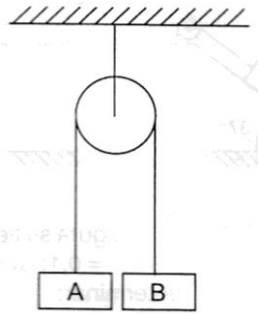
$$\Delta r = \frac{1}{2} (0,75 \text{ m/s}^2) (6 \text{ s})^2$$

$$\Delta r = 13,5 \text{ m}$$

26. Dos cuerpos A y B de 300g cada uno, están sujetos a los extremos de una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento. Si sobre el cuerpo B se coloca otro de 100g. Determinar:

a) La aceleración de cada cuerpo

- b) La tensión de la cuerda
- c) La velocidad del bloque B a los 5s de dejarlo en libertad

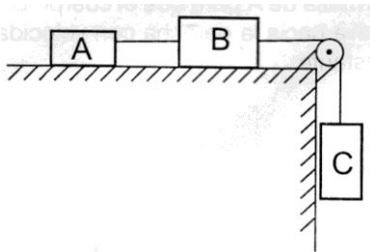


SOLUCIÓN:

27. Tres cuerpos A, B y C de 10,20 y 30kg respectivamente, están unidos mediante dos cuerdas como indica la figura

Si $\mu_A = 0,3$ y $\mu_B = 0,15$, determinar:

- a) La aceleración del cuerpo B
- b) Las tensiones en las cuerdas



SOLUCIÓN:

Datos:

$$m_A = 10 \text{ kg}$$

$$m_B = 20 \text{ kg}$$

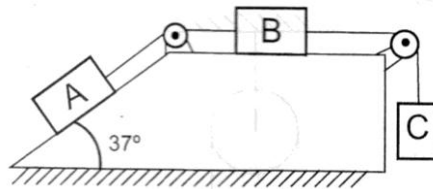
$$m_C = 30 \text{ kg}$$

$$\mu_A = 0,3$$

$$\mu_B = 0,15$$

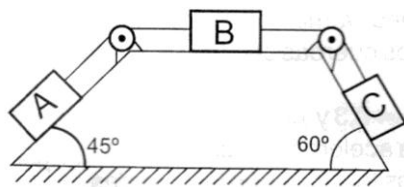
28. Tres cuerpos A, B y C de 40, 20 y 60 kg respectivamente, están unidos mediante dos cuerdas como indica la figura. Si todas las superficies son lisas; determinar:

- La aceleración del cuerpo C
- En qué sentido se mueve cada uno de los cuerpos
- Las tensiones en las cuerdas



SOLUCIÓN:

29. En el sistema de la figura se tiene que $m_B = m_C = 15\text{ kg}$. Si $\mu_A = 0,1$; $\mu_B = 0,2$ y $\mu_C = 0,3$, determinar:



- La masa de A para que el cuerpo B se mueva hacia la derecha con velocidad constante
- La masa de A para que el cuerpo B se mueva hacia la izquierda con velocidad constante
- La masa de A para que el cuerpo B se mueva hacia la derecha con una aceleración de $1,3\text{ m/s}^2$
- La masa de A para que el cuerpo B se mueva hacia la izquierda con una aceleración de $1,3\text{ m/s}^2$

SOLUCIÓN:

Datos:

$$m_B = m_C = 15 \text{ kg}$$

$$\mu_A = 0,1$$

$$\mu_B = 0,2$$

$$\mu_C = 0,3$$

a)

CUERPO A

$$\sum F_y = 0$$

$$N_A - m_A g \cos \theta_A = 0$$

$$N_A = m_A g \cos \theta_A$$

$$\sum F_x = 0$$

$$T_1 - m_A g \sin \theta_A - \mu_A m_A g \cos \theta_A = 0$$

$$T_1 = m_A g \sin \theta_A + \mu_A m_A g \cos \theta_A \dots\dots\dots(1)$$

CUERPO B

$$\sum F_y = 0$$

$$N - m_B g = 0$$

$$N = m_B g$$

$$\sum F_x = 0$$

$$T_2 - T_1 - \mu_B m_B g = 0 \dots\dots\dots(2)$$

CUERPO C

$$\sum F_y = 0$$

$$N_C - m_C g \cos \theta_C = 0$$

$$N_C = m_C g \cos \theta_C$$

$$\sum F_x = 0$$

$$m_C g \sin \theta - T_2 - \mu_C m_C g \cos \theta_C = 0$$

$$T_2 = m_C g \sin \theta - \mu_C m_C g \cos \theta_C \dots\dots\dots(3)$$

(3) y (1) en (2)

$$m_C g \sin \theta - \mu_C m_C g \cos \theta_C - (m_A g \sin \theta_A + \mu_A m_A g \cos \theta_A) - \mu_B m_B g = 0$$

$$m_A g \sin \theta_A + \mu_A m_A g \cos \theta_A = m_C g \sin \theta - \mu_C m_C g \cos \theta_C - \mu_B m_B g$$

$$m_A g (\sin \theta_A + \mu_A \cos \theta_A) = g (m_C \sin \theta - \mu_C m_C \cos \theta_C - \mu_B m_B)$$

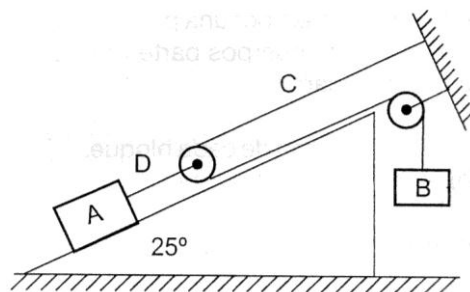
$$m_A = \frac{g (m_C \sin \theta - \mu_C m_C \cos \theta_C - \mu_B m_B)}{g (\sin \theta_A + \mu_A \cos \theta_A)}$$

$$m_A = \frac{m_C \sin \theta - \mu_C m_C \cos \theta_C - \mu_B m_B}{\sin \theta_A + \mu_A \cos \theta_A}$$

b)

30. En el sistema de la figura los cuerpos A y B son de 18 y 6kg respectivamente. Si $\mu_C = 0,25$; determinar:

- La aceleración de cada bloque
- En qué sentido se mueve cada uno de los bloques
- Las tensiones en las cuerdas C y D



SOLUCIÓN:

EJERCICIO N°14

- Un cuerpo de 2kg atado al extremo de una cuerda de 1,5m de longitud, gira sobre un plano horizontal liso con una aceleración angular de 10 rad/s^2 . Determinar:

- La aceleración tangencial del cuerpo

- b) La fuerza tangencial a que esta sometido el cuerpo
- c) Que fuerza neta actúa sobre el cuerpo, cuando su rapidez es 3m/s

SOLUCIÓN:

2. Un automóvil de 1200kg recorre una curva horizontal de 350m de radio con una rapidez de 36km/h. Si la curva no tiene peralte, determinar:

- a) La aceleración centrípeta que actúa sobre el cuerpo
- b) La fuerza ejercida por las ruedas sobre la carretera, para mantener el movimiento sobre la curva

SOLUCIÓN:

3. Un cuerpo de 500g atado al extremo de una cuerda de 1m de longitud, gira sobre un plano horizontal liso con una velocidad angular de 40 rad/s. Determinar:

- a) La aceleración centrípeta del cuerpo
- b) La tensión de la cuerda
- c) La máxima rapidez con la que puede girar, si la tensión de rotura es 1000[N]

SOLUCIÓN:

4. Un avión lleva una rapidez de 648km/h en una curva horizontal. Si la fuerza centrípeta que actúa sobre el piloto de 65kg es de 1000[N], determinar:

- a) La aceleración centrípeta que actúa sobre el piloto
- b) El radio de la curva en que se mueve el avión

SOLUCIÓN:

5. Un cuerpo de 15kg parte del reposo y se mueve alrededor de una circunferencia horizontal de 40m de radio, por la acción de una fuerza tangencial de 1200[N] que actúa durante 8s. Determinar:
- a) La aceleración tangencial que actúa sobre el cuerpo
 - b) La aceleración angular
 - c) La fuerza centrípeta que actúa sobre el cuerpo al término de los 8s.

SOLUCIÓN:

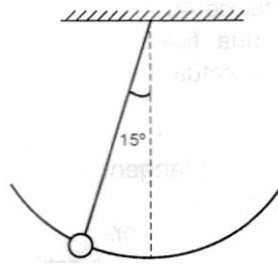
6. Un cuerpo de 10kg atado a una cuerda de 1,6 m de longitud, gira con velocidad constante en círculos horizontales. Si el periodo es de 3s, determinar:
- a) La velocidad del cuerpo
 - b) La fuerza centrípeta que actúa sobre el cuerpo

SOLUCIÓN:

7. Un cuerpo de 8kg atado a una cuerda de 1,3 m de la longitud, gira por una trayectoria circular horizontal a 720 RPM. Determinar:
- a) La aceleración centrípeta
 - b) La fuerza centrípeta que actúa sobre el cuerpo

SOLUCIÓN:

8. Un péndulo de 1,5 m de longitud, describe un arco de circunferencia sobre un plano vertical. Si la tensión de la cuerda es cuatro veces el peso del cuerpo, cuando están en la posición indicada en la figura, determinar:
- a) La aceleración tangencial del cuerpo
 - b) La aceleración centrípeta
 - c) La rapidez del cuerpo



SOLUCIÓN:

9. Se lanza un proyectil de 5kg con una velocidad de $(26 \vec{i} + 32 \vec{j})$ m/s. Determinar a los 2s de vuelo:
- El valor de la fuerza tangencial que actúa sobre el proyectil.
 - El valor de la fuerza centrípeta que actúa sobre el proyectil
 - El valor de la fuerza neta que actúa sobre el proyectil

SOLUCIÓN:

10. El cuerpo de un péndulo cónico es de 2kg y cuelga de una cuerda de 8m de longitud, describiendo una trayectoria circular en un plano horizontal. Si el cuerpo se desvía de la vertical hasta que la cuerda forme un ángulo de 30° con la vertical, determinar:
- La tensión de la cuerda
 - Cual es la rapidez del cuerpo

SOLUCIÓN:

11. Un motociclista y su maquina, que pesan 1500[N], describen un rizo de 4m de radio. Si $\mu = 0$, determinar:
- La velocidad critica
 - La fuerza que ejerce el rizo sobre el mo9vil en la parte superior

- c) La fuerza que ejerce el rizo sobre el móvil en la parte inferior, si su rapidez en ese punto es de 14m/s.

SOLUCIÓN:

12. Una carretera en una curva de 50m de radio, tiene un ángulo d peralte de 18° . Si $\mu = 0,3$, determinar:

- a) El rango de velocidades con que podría entrar en la curva de un auto, para que no derrape
- b) El valor de la velocidad optima con la que el auto deberá tomar la curva

SOLUCIÓN:

13. En un péndulo cónico, la longitud de la cuerda es 0,65m y el cuerpo de 0,8kg describe una trayectoria circular horizontal con una velocidad angular de 4rad/s. Determinar:

- a) La tensión de la cuerda
- b) El ángulo entre la cuerda y la vertical

SOLUCIÓN:

14. Un cuerpo de 1kg describe una circunferencia vertical atado al extremo de una cuerda de 1,2m de longitud, con una rapidez constante de 5m/s. Determinar la tensión de la cuerda cuando:

- a) El cuerpo se encuentra en el punto mas bajo de la trayectoria
- b) El cuerpo se encuentra en el punto mas alto de la trayectoria
- c) El cuerpo se encuentra al mismo nivel que el centro de la circunferencia
- d) Esta forma un ángulo de 60° sobre la horizontal

SOLUCIÓN:

15. Un vehículo de 800kg describe una curva horizontal de 35m de radio. Si $\mu = 0,2$, determinar:

- a) La máxima velocidad en km/h con que podrá tomar la curva sin derrapar, si no hubiese peralte
- b) El peralte de la curva para que no derrape a la velocidad de 108m/h

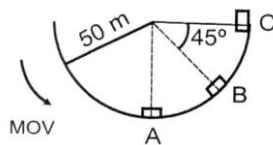
SOLUCIÓN:

16. Sobre un disco se coloca un cuerpo de 50g a una distancia de 15cm del centro. Si el sistema gira en el plano horizontal partiendo del reposo, con una aceleración angular de $2,5\text{rad/s}^2$ y si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el disco es 0,2, determinar:

- a) El tiempo que el cuerpo permanecerá sin deslizar, respecto del disco
- b) Que rapidez tendrá el cuerpo cuando comienza a deslizarse

SOLUCIÓN:

17. Un cuerpo de 15kg se mueve con rapidez constante de 4m/s por la pista de la figura. Determinar la reacción que ejerce la pista sobre el cuerpo en los puntos A, B y C.



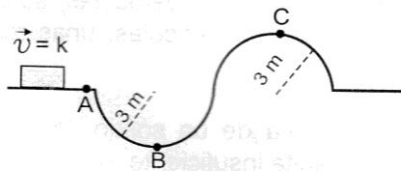
SOLUCIÓN:

18. Un cuerpo de 1,5kg cuelga de una cuerda de 1,8m de longitud. Cuando la cuerda forma un ángulo de 40° con la vertical, el cuerpo tiene una velocidad de 6m/s. Determinar-.

- a) La aceleración tangencial
- b) La aceleración centrípeta
- c) El valor de la aceleración total
- d) La tensión en la cuerda
- e) El valor de la fuerza total ejercida sobre el cuerpo

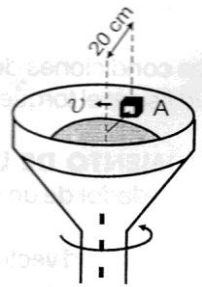
SOLUCIÓN:

19. Un móvil de 4kg se desplaza con una rapidez constante de 5m/s por la pista de la figura. Determinar el valor de la fuerza centrípeta en los puntos A, B y C



SOLUCIÓN:

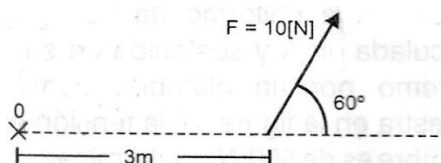
20. El sistema de la figura gira alrededor de un eje vertical con velocidad constante. Conociendo que el coeficiente de rozamiento entre el pequeño bloque A y la pared cilíndrica es 0,2, determinar la mínima velocidad para la cual el bloque permanecerá en contacto con la pared



SOLUCIÓN:

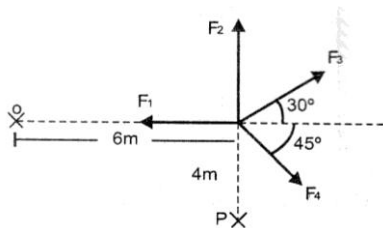
EJERCICIO N° 15

1. Calcular el torque de la fuerza F de la figura respecto del punto O por tres métodos diferentes.



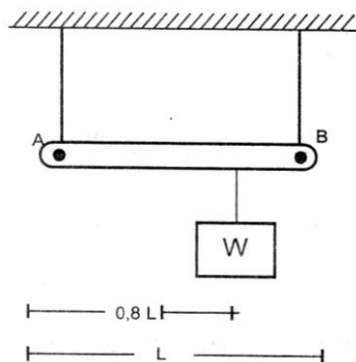
SOLUCIÓN:

2. En la figura: $F_1 = 35[N]$, $F_2 = 30[N]$, $F_3 = 50[N]$, $F_4 = 40[N]$. Calcular el torque resultante respecto a los puntos O y P



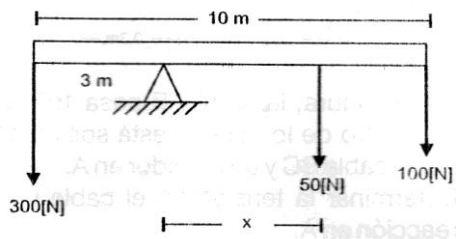
SOLUCIÓN:

3. La viga horizontal AB de la figura es uniforme y pesa $200[N]$. Determinar la tensión en cada una de las cuerdas que soportan la viga, cuando se cuelga un peso $W=100[N]$ en la posición indicada en la figura.



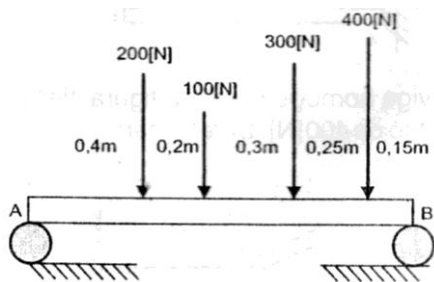
SOLUCIÓN:

4. Una regla graduada de 1m, se equilibra con un apoyo en su centro. Si se coloca un cuerpo de masa 100g en la marca de 80 cm, ¿En que marca deberá colocarse otra masa de 60g para que la regla siga en equilibrio?
5. En la figura representada, ¿Cuál debe ser el mayor de la distancia x en metros, para que el sistema permanezca en equilibrio? Se considera despreciable el peso de la barra.



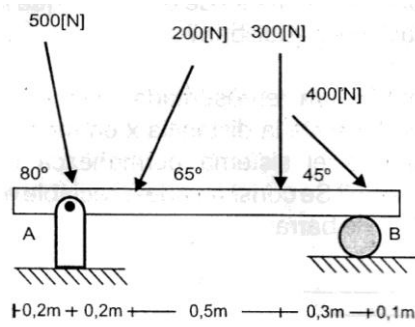
SOLUCIÓN:

6. En la figura, determinar las reacciones en los apoyos A y B, causadas por las cargas que actúan sobre la viga, cuyo peso es despreciable.



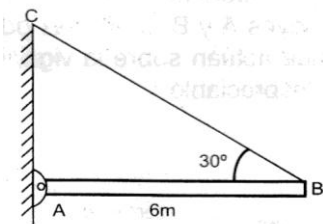
SOLUCIÓN:

7. En la figura determinar las reacciones en los apoyos A y B, causadas por las cargas que actúan sobre la viga de peso despreciable.



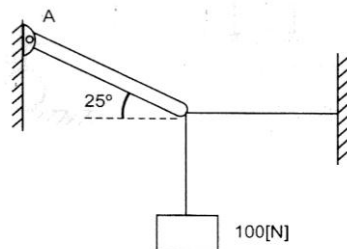
SOLUCIÓN:

8. En la figura, la barra AB pesa 150[N] por metro de longitud y esta sostenida por el cable BC y un pasador en A. Determinar la tensión en el cable y la reacción en A.



SOLUCIÓN:

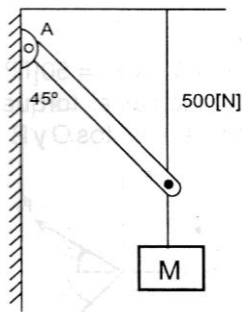
9. La viga homogénea de la figura, tiene un peso de 400[N]. Determinar



- a) La fuerza que hace el pasador sobre la viga
- b) La tensión en el cable horizontal

SOLUCIÓN:

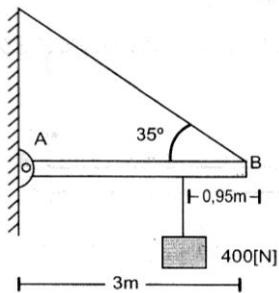
10. Una viga uniforme de 15kg está articulada en A y sostenida en su otro extremo por un alambre, como se muestra en la figura. Si la tensión en el alambre es 500[N], determinar:



- a) El valor de la masa M, que sostiene la viga
- b) Cual es la fuerza que hace el pasador A, sobre la viga

SOLUCIÓN:

11. En la figura, la viga AB tiene un peso de 300[N] por metro de longitud. Determinar:

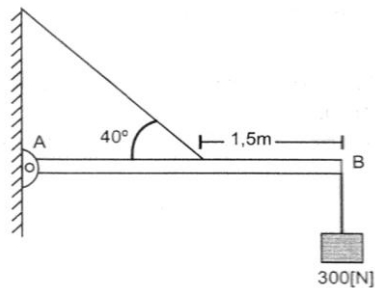


- a) La tensión sobre el cable

b) La fuerza del pasador A sobre la viga

SOLUCIÓN:

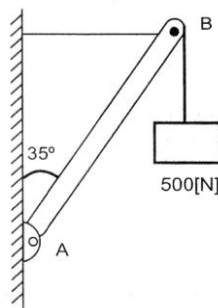
12. En la figura la barra AB de 200[N] de peso y 6m de longitud, esta pivoteada en el extremo izquierdo. Determinar:



- a) La tensión en el cable de apoyo
- b) La fuerza del pasador A sobre la barra

SOLUCIÓN:

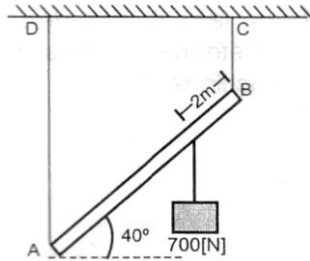
13. En la figura, la viga AB tiene un peso de 800[N]. Determinar:



- a) La tensión en el cable de apoyo
- b) La fuerza del pasador A sobre la viga

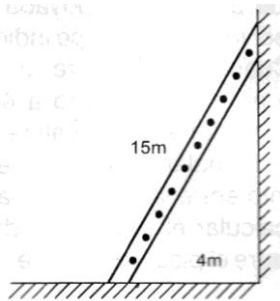
SOLUCIÓN:

14. La barra AB de 250[N], y 10m de longitud, se mantiene en la posición de la figura por la acción de dos cuerdas AD y BC. Si se coloca un peso de 700[N] a 2m del extremo superior, determinar las tensiones en las cuerdas.



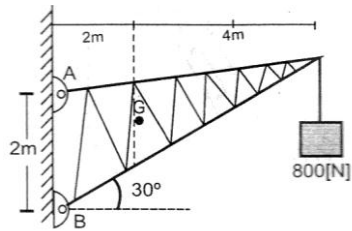
SOLUCIÓN:

15. Una escalera de 15m de longitud tiene una masa de 20 kg. Descansa contra una pared vertical lisa, y su parte inferior se encuentra en el piso a 4m de la pared. ¿Cuál debe ser el coeficiente mínimo de fricción estática entre la escalera y el suelo, para que una persona de 80kg pueda subir con seguridad hasta el 70% de la escalera?



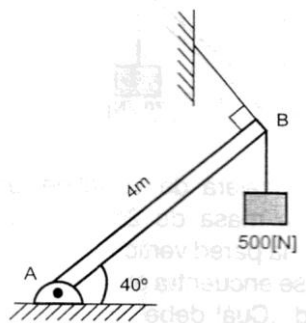
SOLUCIÓN:

16. En la figura, la grúa de 6000[N] está sostenida por medio de dos pasadores A y B, siendo liso el A. Si el centro de gravedad está localizado en B, determinar las reacciones en A y en B.



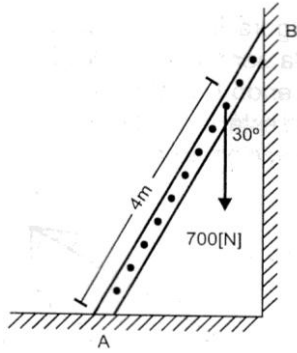
SOLUCIÓN:

17. En la figura, la barra AB tiene un peso de 400[N]. Determinar la tensión en el cable y la reacción en A.



SOLUCIÓN:

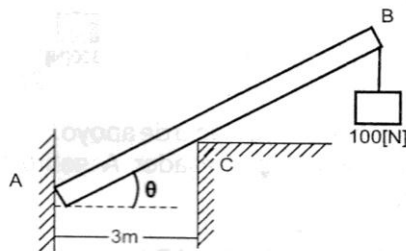
18. Una escalera de 5m longitud y 100[N] de peso, esta apoyada contra una pared vertical, como se indica en la figura: Cuando un hombre de 700[N] de peso alcanza un punto a 4m del extremo inferior A, la escalera está a punto de resbalar. Si el coeficiente de rozamiento entre la escalera y la pared es 0,3 calcular el coeficiente de rozamiento entre el piso y la escalera.



SOLUCIÓN:

19. En la figura, la viga AB de peso despreciable y 10m de longitud, está apoyada en una pared vertical A y en una esquina C perfectamente lisas. Determinar:

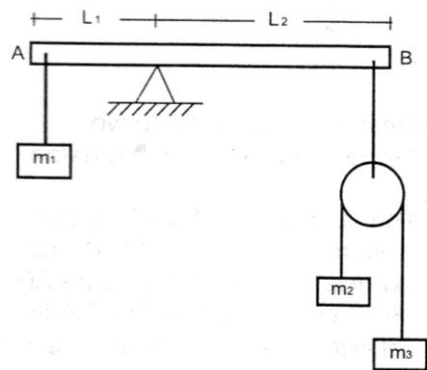
- El ángulo θ para que la viga este en equilibrio
- Las reacciones en los puntos de apoyo



SOLUCIÓN:

20. En el sistema de la figura, si m_3 es mayor que m_2 , demuestre que:

$m_1(m_2 + m_3)L_1 = 4m_2 \cdot m_3 \cdot L_2$, para que la varilla AB de masa despreciable esté en equilibrio



SOLUCIÓN: